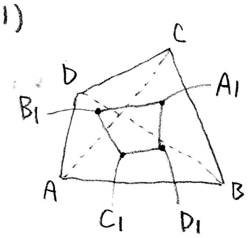
京大理系 1982前期 ③ ，京大文系 1982前期 ⑤

(1)



平面上の適当な位置に点Oをとる。

Oに対するA, B, C, DおよびAn, Bn, Cn, Dnの位置ベクトルを $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}, \vec{A_n}, \vec{B_n}, \vec{C_n}, \vec{D_n}$ とする。

$\vec{A_1}=\frac{\vec{B}+\vec{C}+\vec{D}}{3}$, $\vec{B_1}=\frac{\vec{A}+\vec{C}+\vec{D}}{3}$, $\vec{C_1}=\frac{\vec{A}+\vec{B}+\vec{D}}{3}$, $\vec{D_1}=\frac{\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}}{3}$

線分AA1上の点は $0\leqq a\leqq 1$ として $\vec{A}+a\vec{AA_1}=\vec{A}+a\vec{A_1}-a\vec{A}=(-a+1)\vec{A}+a\frac{\vec{B}+\vec{C}+\vec{D}}{3}=\frac{(-3a+3)\vec{A}+a\vec{B}+a\vec{C}+a\vec{D}}{3}$ —① と書ける。

同様にして線分BB1, CC1, DD1上の点は $0\leqq b\leqq 1$, $0\leqq c\leqq 1$, $0\leqq d\leqq 1$ として

$\frac{b\vec{A}+(-3b+3)\vec{B}+b\vec{C}+b\vec{D}}{3}$ —②, $\frac{c\vec{A}+c\vec{B}+(-3c+3)\vec{C}+c\vec{D}}{3}$ —③, $\frac{d\vec{A}+d\vec{B}+d\vec{C}+(-3d+3)\vec{D}}{3}$ —④ と書ける。

$-3a+3=a$ のとき $a=\frac{3}{4}$ より $a=b=c=d=\frac{3}{4}$ とすると、①②③④は $\frac{\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}+\vec{D}}{4}$ となる。

位置ベクトルが $\vec{P}=\frac{\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}+\vec{D}}{4}$ である点をPとすると、線分AA1, BB1, CC1, DD1は1点Pを共有する。

文系の(2) $\vec{P}=\vec{A}+\frac{3}{4}\vec{AA_1}=\vec{B}+\frac{3}{4}\vec{BB_1}=\vec{C}+\frac{3}{4}\vec{CC_1}=\vec{D}+\frac{3}{4}\vec{DD_1}$ より AP : PA1 = BP : PB1 = CP : PC1 = DP : PD1 = 3 : 1

理系の(2) (1)と同様にして $\vec{A_n}+\frac{3}{4}\vec{A_nA_{n+1}}=\vec{P}$, $\frac{3}{4}\vec{A_{n+1}}+\frac{1}{4}\vec{A_n}=\vec{P}$, $\vec{A_{n+1}}=-\frac{1}{3}\vec{A_n}+\frac{4}{3}\vec{P}$　　$x=-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}P$, $x=P$

$\vec{A_{n+1}}-\vec{P}=-\frac{1}{3}(\vec{A_n}-\vec{P})$, $n\geqq 2$のとき $\vec{A_n}-\vec{P}=-\frac{1}{3}(\vec{A_{n-1}}-\vec{P})=\cdots=\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}(\vec{A_1}-\vec{P})$

(1)より $\vec{A}+\frac{3}{4}\vec{AA_1}=\vec{P}$, $\frac{3}{4}\vec{A_1}+\frac{1}{4}\vec{A}=\vec{P}$, $\vec{A_1}=-\frac{1}{3}\vec{A}+\frac{4}{3}\vec{P}$ より $\vec{A_n}-\vec{P}=\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(-\frac{1}{3}\vec{A}+\frac{1}{3}\vec{P}\right)=\left(-\frac{1}{3}\right)^{n}(\vec{A}-\vec{P})$

$\vec{A_n}=\vec{P}+\left(-\frac{1}{3}\right)^{n}\vec{PA}$　よって、点Anは直線AP上にある。

理系の(3) $n\to\infty$ のとき $\vec{A_n}\to\vec{P}$, よって $\lim_{n\to\infty}\overline{A_nP}=0$