京大理系 1982前期 ①

(1) $f(x)=x^3+ax$ を考える

$f'(x)=3x^2+a$ ，$\begin{cases} a \geqq 0 \text{ のとき } f'(x) \geqq 0 \\ a<0 \text{ のとき } f'(x)=0 \text{ のとき } x=\pm\sqrt{-\frac{a}{3}} \end{cases}$

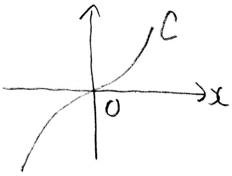

図1

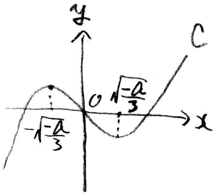

図2

$a \geqq 0$ のとき C は図1のようになる

$a<0$ のとき C は図2のようになる

Pのx座標を p とすると 接線の方程式は

$y-p^3-ap=(3p^2+a)(x-p)$. $y=(3p^2+a)x-3p^3-\cancel{ap}+p^3+\cancel{ap}=(3p^2+a)x-2p^3$

$$\begin{array}{r} x+2p \\ x^2-2px+p^2 \,\big)\, \overline{x^3 \qquad -3p^2x+2p^3} \\ \underline{x^3-2px^2+p^2x \qquad\quad} \\ 2px^2-4p^2x+2p^3 \\ \underline{2px^2-4p^2x+2p^3} \\ 0 \end{array}$$

接線と C の交点のx座標は

$x^3+ax=(3p^2+a)x-2p^3$, $x^3-3p^2x+2p^3=0$, $(x-p)^2(x+2p)=0$ の解であるから

題意は示された

(2) (i) $p>0$ のとき

接線は C の下側にある $-2p<p$

$\int_{-2p}^{0}\{x^3+ax-(3p^2+a)x+2p^3\}dx=\left[\frac{x^4}{4}-3p^2\frac{x^2}{2}+2p^3x\right]_{-2p}^{0}=-\frac{\overset{4}{\cancel{16}}p^4}{\cancel{4}}+\frac{3p^2}{\cancel{2}}\overset{2}{\cancel{4}}p^2+\cancel{4p^4}=6p^4$

$\int_{0}^{p}\{x^3+ax-(3p^2+a)x+2p^3\}dx=\left[\frac{x^4}{4}-3p^2\frac{x^2}{2}+2p^3x\right]_{0}^{p}=\frac{p^4}{4}-\frac{3}{2}p^4+2p^4=\frac{1-6+8}{4}p^4=\frac{3}{4}p^4$

よって $\overset{2}{\cancel{6}}:\frac{\cancel{3}}{4}=8:1$

(ii) $p<0$ のとき

接線は C の上側にある $-2p>p$

$\int_{p}^{0}\{(3p^2+a)x-2p^3-x^3-ax\}dx=\left[-\frac{x^4}{4}+3p^2\frac{x^2}{2}-2p^3x\right]_{p}^{0}=\frac{p^4}{4}-\frac{3}{2}p^4+2p^4=\frac{3}{4}p^4$

$\int_{0}^{-2p}\{(3p^2+a)x-2p^3-x^3-ax\}dx=\left[-\frac{x^4}{4}+3p^2\frac{x^2}{2}-2p^3x\right]_{0}^{-2p}=-\frac{16p^4}{4}+\frac{3p^2}{2}4p^2+4p^4=6p^4$

よって $\frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{4}:\overset{2}{\cancel{6}}=1:8$

(i)(ii)より $8:1$