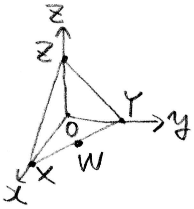
京大理系　1982前期　④

(1)



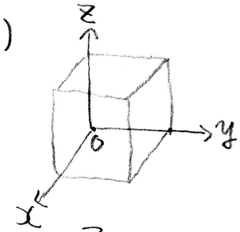
平面とx軸,y軸,z軸の交点をX,Y,Zとすると

これらの座標は$(t,0,0)$,$(0,t,0)$,$(0,0,t)$

X,Yの中点Wの座標は$\left(\frac{t}{2},\frac{t}{2},0\right)$, ZとWのきょりは$\sqrt{\frac{t^2}{4}+\frac{t^2}{4}+t^2}=\frac{\sqrt6}{2}t$

よって$T(t)=\sqrt2 t\frac{\sqrt6}{2}t\frac12=\frac{\sqrt3}{2}t^2$

(2)



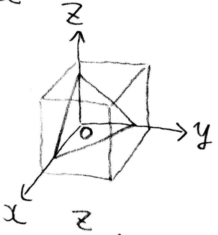
対称性より $0<t\leqq\frac32$ のときを考える.

(i) $0<t\leqq1$ のとき

$S(t)=T(t)=\frac{\sqrt3}{2}t^2$

このとき $S(t)$は $t=1$のとき最大値$\frac{\sqrt3}{2}$をとる.

(ii) $1<t\leqq\frac32$ のとき



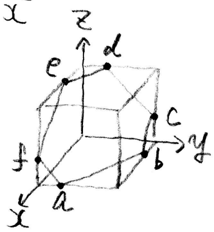
左下図のようにa,b,c,d,e,fをとると これらの座標は

$(1,t-1,0)$,$(t-1,1,0)$,$(0,1,t-1)$,$(0,t-1,1)$,$(t-1,0,1)$,$(1,0,t-1)$

a,bのきょりは$\sqrt{(2-t)^2+(t-2)^2}=\sqrt2(2-t)$

c,fのきょりは$\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt2$

d,eのきょりは$\sqrt{(1-t)^2+(t-1)^2}=\sqrt2(t-1)$



a,bの中点,c,fの中点,d,eの中点をg,h,iとすると これらの座標は

$\left(\frac{t}{2},\frac{t}{2},0\right)$,$\left(\frac12,\frac12,t-1\right)$,$\left(\frac{t-1}{2},\frac{t-1}{2},1\right)$

g,hのきょりは$\sqrt{\left(\frac{t}{2}-\frac12\right)^2+\left(\frac{t}{2}-\frac12\right)^2+(1-t)^2}=\sqrt{\frac14(t-1)^2+\frac14(t-1)^2+(t-1)^2}=\frac{\sqrt6}{2}(t-1)$

h,iのきょりは$\sqrt{\left(1-\frac{t}{2}\right)^2+\left(1-\frac{t}{2}\right)^2+(t-2)^2}=\sqrt{\frac14(2-t)^2+\frac14(2-t)^2+(2-t)^2}=\frac{\sqrt6}{2}(2-t)$

よって$S(t)=\{\sqrt2(2-t)+\sqrt2\}\frac{\sqrt6}{2}(t-1)\frac12+\{\sqrt2+\sqrt2(t-1)\}\frac{\sqrt6}{2}(2-t)\frac12$

$=\frac{\sqrt3}{2}(-t+3)(t-1)+\frac{\sqrt3}{2}t(-t+2)=\frac{\sqrt3}{2}(-t^2+t+3t-3-t^2+2t)$

$=\frac{\sqrt3}{2}(-2t^2+6t-3)=\frac{\sqrt3}{2}\left\{-2\left(t^2-3t+\frac94\right)+\frac92-3\right\}=\frac{\sqrt3}{2}\left\{-2\left(t-\frac32\right)^2+\frac32\right\}$

このとき$S(t)$は$t=\frac32$のとき最大値$\frac{3\sqrt3}{4}$をとる

(i)(ii)より $S(t)$の最大値は$\frac{3\sqrt3}{4}$