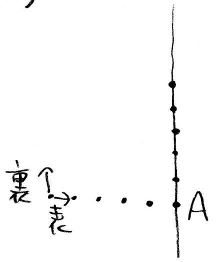
京大理系　1982前期　⑤

(1)



表がn回、裏が4回出て、最後に表が出ればよい

表がn回、裏が4回出る場合の数は　$\dfrac{(n+4)!}{n!4!}$

これが起こる確率は $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+4}$

最後に表が出る確率は $\dfrac{1}{2}$

よって、$p_n=\dfrac{(n+4)!}{n!4!}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+5}$

(2) $\dfrac{p_{n+1}}{p_n}=\dfrac{\dfrac{(n+5)!}{(n+1)!4!}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+6}}{\dfrac{(n+4)!}{n!4!}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+5}}=\dfrac{(n+5)\cancel{(n+4)!}\,\cancel{n!}\,\cancel{4!}}{(n+1)\cancel{n!}\,\cancel{4!}\,\cancel{(n+4)!}}\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\dfrac{n+1+4}{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{4}{n+1}\right)$

$f(n)=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{4}{n+1}\right)$　$(n=1,2\cdots)$ とすると、$f(n)$は単調減少

$f(1)=\dfrac{1}{2}(1+2)>1$　より　$\dfrac{p_2}{p_1}>1$，$p_2>p_1$

$f(2)=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{4}{3}\right)>1$　より　$\dfrac{p_3}{p_2}>1$，$p_3>p_2$

$f(3)=\dfrac{1}{2}(1+1)=1$　より　$\dfrac{p_4}{p_3}=1$，$p_4=p_3$

$f(4)=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{4}{5}\right)<1$　より　$\dfrac{p_5}{p_4}<1$，$p_5<p_4$

$\vdots$

よって、$p_1<p_2<p_3=p_4>p_5>p_6\cdots$ となるから、$n=3,4$