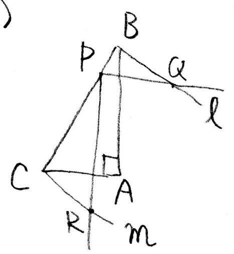
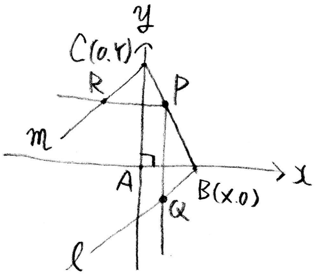
京大理系　1983前期　②

(1)





xy座標で考える

A.B.Cの座標を(0.0). $(X.0)$. $(0.Y)$ $(X>0, Y>0)$とする

BCの方程式は $y=-\frac{Y}{X}x+Y$ $(0\leqq x\leqq X)$

lの方程式は $y=\frac{X}{Y}(x-X)$ $(x\leqq X)$

mの方程式は $y=\frac{X}{Y}x+Y$ $(x\leqq 0)$

Pの座標を $(p, -\frac{Y}{X}p+Y)$ $(0\leqq p\leqq X)$ とする

Qの座標は $(p, \frac{X}{Y}p-\frac{X^2}{Y})$ —①

$\frac{X}{Y}x+\cancel{Y}=-\frac{Y}{X}p+\cancel{Y}$, $x=-\frac{Y^2}{X^2}p$ より Rの座標は $(-\frac{Y^2}{X^2}p, -\frac{Y}{X}p+Y)=-\frac{Y^2}{X^2}(p, \frac{X}{Y}p-\frac{X^2}{Y})$ —②

①②より題意は示された.

(2) (1)より 台形BCRQの面積$=$△ABCの面積$+$△ABQの面積$+$△ACRの面積 より

△ABQの面積$+$△ACRの面積$=$△ABCの面積 であるから

$X(-\frac{X}{Y}p+\frac{X^2}{Y})\cancel{\frac{1}{2}}+Y\frac{Y^2}{X^2}p\cancel{\frac{1}{2}}=XY\cancel{\frac{1}{2}}$, $-X^4p+X^5+Y^4p=X^3Y^2$, $X^3(X^2-Y^2)=(X^2+Y^2)(X^2-Y^2)p$

$AB\neq AC$ より $X^2-Y^2\neq 0$ より $p=\frac{X^3}{X^2+Y^2}$

Qの座標は $\left(\frac{X^3}{X^2+Y^2}, \frac{X}{\cancel{Y}}\frac{\cancel{X^3}-\cancel{X^3}-XY^{\cancel{2}}}{X^2+Y^2}\right)=\frac{X^3}{X^2+Y^2}(1, -\frac{Y}{X})$, よって BC//QR

台形は長方形