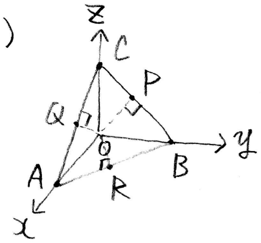
京大理系　1983前期　④

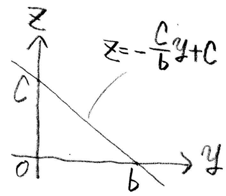
(1)



xyz空間で考える

O.A.B.Cの座標を $(0.0.0).(a.0.0),(0.b.0).(0.0.c)$ とする

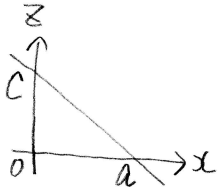
四面体OABCの体積は $ab\frac{1}{2}c\frac{1}{3}=\frac{1}{6}abc$

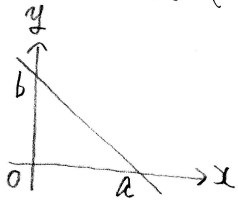


$t^2+\left(-\frac{c}{b}t+c\right)^2=t^2+\frac{c^2}{b^2}t^2-\frac{2c^2}{b}t+c^2=\frac{b^2+c^2}{b^2}\left\{t^2-\frac{b^{\cancel{2}}}{b^2+c^2}\frac{2c^2}{\cancel{b}}t+\left(\frac{bc^2}{b^2+c^2}\right)^2\right\}-\frac{c^4}{b^2+c^2}+c^2$

$=\frac{b^2+c^2}{b^2}\left(t-\frac{bc^2}{b^2+c^2}\right)^2+\frac{\cancel{-c^4}+b^2c^2+\cancel{c^4}}{b^2+c^2}$,　$-\frac{c}{\cancel{b}}\frac{\cancel{b}c^2}{b^2+c^2}+c=\frac{\cancel{-c^3}+b^2c+\cancel{c^3}}{b^2+c^2}$ より

Pの座標は $\left(0,\frac{bc^2}{b^2+c^2},\frac{b^2c}{b^2+c^2}\right)$





同様にして

Qの座標は $\left(\frac{ac^2}{a^2+c^2},0,\frac{a^2c}{a^2+c^2}\right)$

Rの座標は $\left(\frac{ab^2}{a^2+b^2},\frac{a^2b}{a^2+b^2},0\right)$

四面体OAQRの体積は $a\frac{a^2c}{a^2+c^2}\frac{1}{2}\frac{a^2b}{a^2+b^2}\frac{1}{3}=\frac{a^5bc}{6(a^2+b^2)(a^2+c^2)}$

四面体OBPRの体積は $b\frac{b^2c}{b^2+c^2}\frac{1}{2}\frac{ab^2}{a^2+b^2}\frac{1}{3}=\frac{ab^5c}{6(a^2+b^2)(b^2+c^2)}$

四面体OCPQの体積は $c\frac{bc^2}{b^2+c^2}\frac{1}{2}\frac{ac^2}{a^2+c^2}\frac{1}{3}=\frac{abc^5}{6(a^2+c^2)(b^2+c^2)}$

四面体OPQRの体積は $\frac{1}{6}abc\,\frac{(a^2b^2+c^2a^2+b^4+b^2c^2)(c^2+a^2)-a^4(b^2+c^2)-b^4(c^2+a^2)-c^4(a^2+b^2)}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}$

$=\frac{1}{6}abc\,\frac{a^2b^2c^2+\cancel{a^4b^2}+\cancel{c^4a^2}+\cancel{c^2a^4}+\cancel{b^4c^2}+\cancel{a^2b^4}+\cancel{b^2c^4}+a^2b^2c^2-\cancel{a^4b^2}-\cancel{c^2a^4}-\cancel{b^4c^2}-\cancel{a^2b^4}-\cancel{c^4a^2}-\cancel{b^2c^4}}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}=\frac{1}{6}abc\,\frac{2a^2b^2c^2}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}$

よって　四面体OPQRの体積：四面体OABCの体積 $=\frac{2a^2b^2c^2}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}:1$

(2) 相加平均≧相乗平均 より $\frac{a^2+b^2}{2}\geqq\sqrt{a^2b^2}=ab$, $\frac{b^2+c^2}{2}\geqq\sqrt{b^2c^2}=bc$, $\frac{c^2+a^2}{2}\geqq\sqrt{c^2a^2}=ca$ より

$\frac{\frac{1}{4}a^2b^2c^2}{\frac{a^2+b^2}{2}\frac{b^2+c^2}{2}\frac{c^2+a^2}{2}}\leqq\frac{1}{4}\frac{\cancel{a^2b^2c^2}}{\cancel{ab\cdot bc\cdot ca}}$ より題意は示された