京大理系 1987前期 ①

$$
\begin{array}{r|l}
 & ax + b \\
\hline
x^2+ax+b & ax^3+(a^2+b)x^2+(2ab+c)x+a^2+b^2-a \\
 & ax^3+a^2x^2+abx \\
\hline
 & bx^2+(ab+c)x+a^2+b^2-a \\
 & bx^2+abx+b^2 \\
\hline
 & cx+a^2-a
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & ax - b \\
\hline
x^2+ax+b & ax^3+(a^2-b)x^2+(a-1)x+c^2-b^2 \\
 & ax^3+a^2x^2+abx \\
\hline
 & -bx^2+(-ab+a-1)x+c^2-b^2 \\
 & -bx^2-abx-b^2 \\
\hline
 & (a-1)x+c^2
\end{array}
$$

$f(x)=(ax+b)h(x)+cx+a^2-a$ —①

$g(x)=(ax-b)h(x)+(a-1)x+c^2$ —②

①より $f(x)$が$h(x)$で割り切れるとき、$c=0$ かつ $a=1$

このとき②より $g(x)$も$h(x)$で割り切れる.

①より $f(x)$が$h(x)$で割り切れないとき、$c\neq 0$、または、$a\neq 1$

②より $c\neq 0$のとき、$g(x)$も$h(x)$で割り切れない.

$a\neq 1$のとき $g(x)$も$h(x)$で割り切れない.

以上より 題意は示された.