京大文系　1989前期　①

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+b \\ c+d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-b \\ c-d \end{pmatrix}$ より

D上の点 $(1, 1)$, $(1, -1)$ がともに D上の点にうつるためには.

$-1 \leqq a+b \leqq 1$ かつ $-1 \leqq a-b \leqq 1$, $-1 \leqq c+d \leqq 1$ かつ $-1 \leqq c-d \leqq 1$

$b \geqq -a-1$ かつ $b \leqq -a+1$ かつ $b \geqq a-1$ かつ $b \leqq a+1$ —①

$d \geqq -c-1$ かつ $d \leqq -c+1$ かつ $d \geqq c-1$ かつ $d \leqq c+1$ —② が必要である.

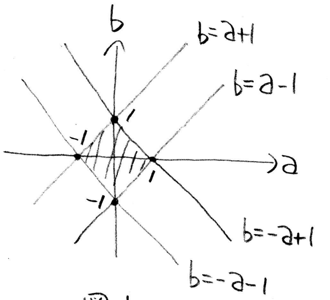

図1

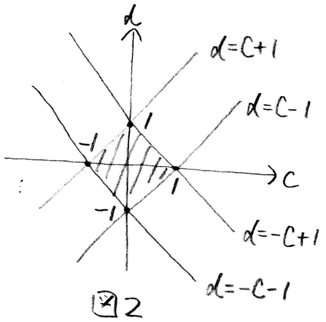

図2

①を満たす (a, b) の領域は
図1の斜線部, 境界線上の点を含む
これは $|a|+|b| \leqq 1$ を満たす (a, b) の領域と
一致する —①'

②を満たす (c, d) の領域は
図2の斜線部, 境界線上の点を含む
これは $|c|+|d| \leqq 1$ を満たす (c, d) の領域と
一致する —②'

①'②' より $|a|+|b| \leqq 1$ かつ $|c|+|d| \leqq 1$ が必要である.

一方. $|a|+|b| \leqq 1$ かつ $|c|+|d| \leqq 1$ が成り立つとき X, Y を $|X| \leqq 1$, $|Y| \leqq 1$ を満たす実数とすると.

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} aX+bY \\ cX+dY \end{pmatrix}$

$|aX+bY| \leqq |aX|+|bY| = |a||X|+|b||Y| \leqq |a|+|b| \leqq 1$

$|cX+dY| \leqq |cX|+|dY| = |c||X|+|d||Y| \leqq |c|+|d| \leqq 1$

より, D が D の部分集合にうつる.

以上より題意は示された.