京大文系 1989前期 ③

$y=-x^3-3x^2-3x-2$ について

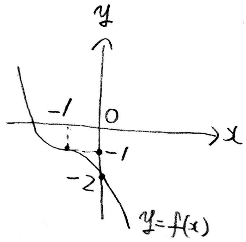
$f(x)=-x^3-3x^2-3x-2$ とする. $f'(x)=-3x^2-6x-3=-3(x+1)^2$, $f'(x)=0$ のとき $x=-1$

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | ↘ | $-1$ | ↘ |

$f(x)$ の増減表は左表

$f(x)$ のグラフは右図

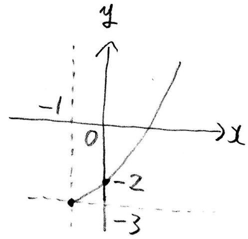
※ $f(-1)=1-3+3-2=-1$




$x=\sqrt{y+3}-1$ について.

$x\geqq -1$, $y\geqq -3$ である.

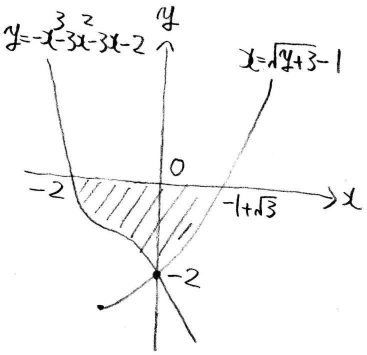
$x+1=\sqrt{y+3}$, $x^2+2x+1=y+3$, $y=(x+1)^2-3$ より $x=\sqrt{y+3}-1$ のグラフは右図




$$
\begin{array}{r}
-x^2-x-1 \\
x+2\,\overline{\big)\,-x^3-3x^2-3x-2} \\
\underline{-x^3-2x^2\phantom{-3x-2}} \\
-x^2-3x\phantom{-2} \\
\underline{-x^2-2x\phantom{-2}} \\
-x-2 \\
\underline{-x-2} \\
0
\end{array}
$$

$-x^3-3x^2-3x-2=-(x+2)(x^2+x+1)$ より $y=-x^3-3x^2-3x-2$ は $x=-2$ で $x$ 軸と交わる.

$x^2+2x-2=0$ のとき $x=-1\pm\sqrt{1+2}=-1\pm\sqrt{3}$ より $x=\sqrt{y+3}-1$ は $x=-1+\sqrt{3}$ で $x$ 軸と交わる.




以上より左図の斜線部の面積を求めればよい.

これは $\displaystyle\int_{-2}^{0}(x^3+3x^2+3x+2)\,dx+\int_{0}^{-1+\sqrt{3}}(-x^2-2x+2)\,dx$

$\displaystyle=\left[-\frac{x^4}{4}-\cancel{3}\frac{x^3}{\cancel{3}}-3\frac{x^2}{2}-2x\right]_0^{-2}+\left[-\frac{x^3}{3}-\cancel{2}\frac{x^2}{\cancel{2}}+2x\right]_0^{-1+\sqrt{3}}$

$\displaystyle=\cancel{-4}+8-6\cancel{+4}-\frac{1}{3}(-1+3\sqrt{3}-9+3\sqrt{3})-(1-2\sqrt{3}+3)-2+2\sqrt{3}$

$\displaystyle=\cancel{2}+\frac{10}{3}\cancel{-2\sqrt{3}}-4\cancel{+2\sqrt{3}}\cancel{-2}+2\sqrt{3}=2\sqrt{3}-\frac{2}{3}$