京大理系 1989前期 ②

$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n$ とする

$a_n \leqq \dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n-1} \leqq \dfrac{\cancel{(n-1)}a_{n-1}}{\cancel{n-1}}$ より $a_{n-1}=a_n$ —①

①より $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_{n-1}=a_n$ とする

$a_{n-1} \leqq \dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-2}+a_n}{n-1} = \dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-2}+a_{n-1}}{n-1}$

$(n-1)a_{n-1} \leqq a_1+a_2+\cdots+a_{n-2}+a_{n-1}$

$\cancel{(n-2)}a_{n-1} \leqq a_1+a_2+\cdots+a_{n-2} \leqq \cancel{(n-2)}a_{n-2}$ より $a_{n-2}=a_{n-1}$ —②

①②より $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_{n-2}=a_{n-1}=a_n$ とする

$a_{n-2} \leqq \dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-3}+a_{n-1}+a_n}{n-1} = \dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-3}+2a_{n-2}}{n-1}$

$(n-1)a_{n-2} \leqq a_1+a_2+\cdots+a_{n-3}+2a_{n-2}$

$\cancel{(n-3)}a_{n-2} \leqq a_1+a_2+\cdots+a_{n-3} \leqq \cancel{(n-3)}a_{n-3}$ より $a_{n-3}=a_{n-2}$

上記の処理を繰り返すことにより 題意を満たすには $a_1=a_2=\cdots=a_n$ が必要

ところで a を実数とすると $a \leqq \dfrac{(n-1)a}{n-1}$

よって $a_1=a_2=\cdots=a_n$