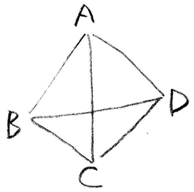
京大理系　1991前期　③



各頂点の位置ベクトルを $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ とする

AB⊥CDより $(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{d}-\vec{c})=0$.　$\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{d}=\vec{a}\cdot\vec{d}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

AC⊥BDより $(\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{d}-\vec{b})=0$.　$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{d}=\vec{a}\cdot\vec{d}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

AD⊥BCより $(\vec{d}-\vec{a})\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0$.　$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{d}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{d}$

よって $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{d}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{d}=\vec{a}\cdot\vec{d}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

Vの重心をWとする　Wの位置ベクトルは $\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}$

ABの中点は $\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$　これとWの距離の2乗は $\left|\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}-2\vec{a}-2\vec{b}}{4}\right|^2=\frac{(-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})\cdot(-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})}{16}$

$$=\frac{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+|\vec{d}|^2+\cancel{2\vec{a}\cdot\vec{b}}-\cancel{2\vec{a}\cdot\vec{c}}-2\vec{a}\cdot\vec{d}-2\vec{b}\cdot\vec{c}-\cancel{2\vec{b}\cdot\vec{d}}+\cancel{2\vec{c}\cdot\vec{d}}}{16}=\frac{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+|\vec{d}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{c}\cdot\vec{d}}{16}\quad\text{—①}$$

ACの中点は $\frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}$　これとWの距離の2乗は $\left|\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}-2\vec{a}-2\vec{c}}{4}\right|^2=\frac{(-\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}+\vec{d})\cdot(-\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}+\vec{d})}{16}$

$$=\frac{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+|\vec{d}|^2-\cancel{2\vec{a}\cdot\vec{b}}+\cancel{2\vec{a}\cdot\vec{c}}-2\vec{a}\cdot\vec{d}-2\vec{b}\cdot\vec{c}+\cancel{2\vec{b}\cdot\vec{d}}-\cancel{2\vec{c}\cdot\vec{d}}}{16}=\frac{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+|\vec{d}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{c}\cdot\vec{d}}{16}\quad\text{—②}$$

ADの中点は $\frac{\vec{a}+\vec{d}}{2}$　これとWの距離の2乗は $\left|\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}-2\vec{a}-2\vec{d}}{4}\right|^2=\frac{(-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-\vec{d})\cdot(-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-\vec{d})}{16}$

$$=\frac{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+|\vec{d}|^2-\cancel{2\vec{a}\cdot\vec{b}}-2\vec{a}\cdot\vec{c}+\cancel{2\vec{a}\cdot\vec{d}}+\cancel{2\vec{b}\cdot\vec{c}}-2\vec{b}\cdot\vec{d}-\cancel{2\vec{c}\cdot\vec{d}}}{16}=\frac{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+|\vec{d}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{c}\cdot\vec{d}}{16}\quad\text{—③}$$

BCの中点は $\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$　これとWの距離の2乗は $\left|\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}-2\vec{b}-2\vec{c}}{4}\right|^2=\frac{(\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}+\vec{d})\cdot(\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}+\vec{d})}{16}$

$$=\frac{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+|\vec{d}|^2-\cancel{2\vec{a}\cdot\vec{b}}-2\vec{a}\cdot\vec{c}+\cancel{2\vec{a}\cdot\vec{d}}+\cancel{2\vec{b}\cdot\vec{c}}-2\vec{b}\cdot\vec{d}-\cancel{2\vec{c}\cdot\vec{d}}}{16}=\frac{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+|\vec{d}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{c}\cdot\vec{d}}{16}\quad\text{—④}$$

BDの中点は $\frac{\vec{b}+\vec{d}}{2}$　これとWの距離の2乗は $\left|\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}-2\vec{b}-2\vec{d}}{4}\right|^2=\frac{(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}-\vec{d})\cdot(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}-\vec{d})}{16}$

$$=\frac{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+|\vec{d}|^2-\cancel{2\vec{a}\cdot\vec{b}}+\cancel{2\vec{a}\cdot\vec{c}}-2\vec{a}\cdot\vec{d}-2\vec{b}\cdot\vec{c}+\cancel{2\vec{b}\cdot\vec{d}}-\cancel{2\vec{c}\cdot\vec{d}}}{16}=\frac{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+|\vec{d}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{c}\cdot\vec{d}}{16}\quad\text{—⑤}$$

CDの中点は $\frac{\vec{c}+\vec{d}}{2}$　これとWの距離の2乗は $\left|\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}-2\vec{c}-2\vec{d}}{4}\right|^2=\frac{(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}-\vec{d})\cdot(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}-\vec{d})}{16}$

$$=\frac{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+|\vec{d}|^2+\cancel{2\vec{a}\cdot\vec{b}}-\cancel{2\vec{a}\cdot\vec{c}}-2\vec{a}\cdot\vec{d}-2\vec{b}\cdot\vec{c}-\cancel{2\vec{b}\cdot\vec{d}}+\cancel{2\vec{c}\cdot\vec{d}}}{16}=\frac{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+|\vec{d}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{c}\cdot\vec{d}}{16}\quad\text{—⑥}$$

①〜⑥より題意は示された.