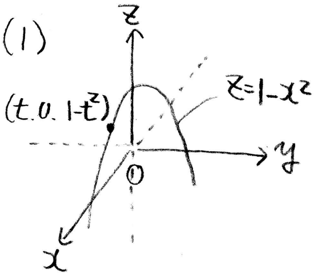
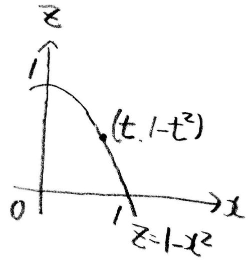
京大理系 1992前期 ⑤

(1)





対称性より立体は正4角錐である

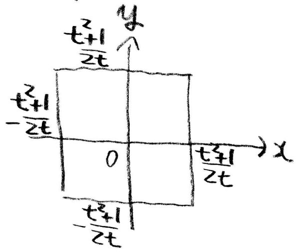
xz-平面上の放物線 $z=1-x^2$ 上の点 $(t, 1-t^2)$ における接線の傾きは $-2t$, 法線の傾きは $\frac{1}{2t}$

曲面に $(t, 0, 1-t^2)$ で接する平面の

法線ベクトルは $(1, 0, \frac{1}{2t})$

方程式は $x-t+\frac{1}{2t}(z-1+t^2)=0$. $2tx-2t^2+z-1+t^2=0$. $2tx+z=t^2+1$

これと xy平面の交わりは $x=\frac{t^2+1}{2t}$, z軸との交点のz座標は t^2+1



よって $V(t)=\left(\frac{t^2+1}{t}\right)^2(t^2+1)\frac{1}{3}=\frac{(t^2+1)^3}{3t^2}$

(2) $W(T)=\frac{(T+1)^3}{3T}$ $(0<T<1)$ とする

$W'(T)=\frac{1}{3}\frac{3(T+1)^2\cdot T-(T+1)^3}{T^2}=\frac{1}{3}\frac{(T+1)^2(3T-T-1)}{T^2}=\frac{1}{3}\frac{(T+1)^2(2T-1)}{T^2}$

$W'(T)=0$ のとき $T=\frac{1}{2}$

T	…	$\frac{1}{2}$	…
$W'(T)$	$-$	0	$+$
$W(T)$	↘	$\frac{9}{4}$	↗

※ $W(\frac{1}{2})=\frac{\frac{27}{8}}{\frac{3}{2}}=\frac{9}{4}$

$W(T)$の増減表は左表

よって $V(t)$は $t=\frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき最小値 $\frac{9}{4}$ をとる