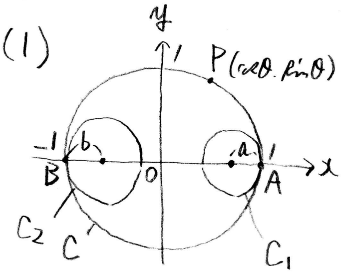
京大理系 1993前期 ②

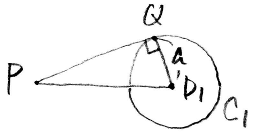
(1)



左図のような xy平面で考える

O, A, B の座標を $(0,0)$, $(1,0)$, $(-1,0)$

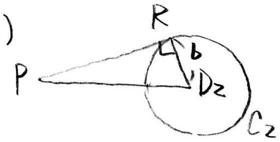
C_1, C_2 の中心を D_1, D_2 として、これらの座標を $(-a+1,0)$, $(b-1,0)$ とする



左図より $PD_1=\sqrt{(\cos\theta+a-1)^2+\sin^2\theta}=\sqrt{1+a^2+1+2a\cos\theta-2\cos\theta-2a}$

$PQ^2+\cancel{a^2}=\cancel{a^2}+2(1-a)-2(1-a)\cos\theta$ $\quad PQ=\sqrt{2(1-a)(1-\cos\theta)}$

(2)



左図より $PD_2=\sqrt{(\cos\theta-b+1)^2+\sin^2\theta}=\sqrt{1+b^2+1-2b\cos\theta+2\cos\theta-2b}$

$PR^2+\cancel{b^2}=\cancel{b^2}+2(1-b)+2(1-b)\cos\theta$ $\quad PR=\sqrt{2(1-b)(1+\cos\theta)}$

$PQ+PR=\sqrt{2(1-a)(1-\cos\theta)}+\sqrt{2(1-b)(1+\cos\theta)}$

$f(\theta)=\sqrt{2(1-a)(1-\cos\theta)}+\sqrt{2(1-b)(1+\cos\theta)}$ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ とする

$f'(\theta)=\sqrt{2(1-a)}\dfrac{1}{2}\dfrac{\sin\theta}{\sqrt{1-\cos\theta}}+\sqrt{2(1-b)}\dfrac{1}{2}\dfrac{-\sin\theta}{\sqrt{1+\cos\theta}}=\dfrac{\sin\theta}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\dfrac{1-a}{1-\cos\theta}}-\sqrt{\dfrac{1-b}{1+\cos\theta}}\right)$

$f'(\theta)=0$ のとき $\sqrt{\dfrac{1-a}{1-\cos\theta}}=\sqrt{\dfrac{1-b}{1+\cos\theta}}$ $\quad \cancel{1}+\cos\theta-a-a\cos\theta=\cancel{1}-b-\cos\theta+b\cos\theta$ $\quad \cos\theta=\dfrac{a-b}{2-a-b}$

ここで $a>b$ のとき $\dfrac{a-b}{2-a-b}>0$. さらに $\dfrac{a-b}{2-a-b}<1$ となるためには $a-\cancel{b}<2-a-\cancel{b}$. $a<1$

$a<b$ のとき $\dfrac{a-b}{2-a-b}<0$ さらに $\dfrac{a-b}{2-a-b}>-1$ となるためには $\cancel{a}-b>-2+\cancel{a}+b$. $b<1$

より, $-1<\dfrac{a-b}{2-a-b}<1$ であるから $0<\varphi<\pi$, $\cos\varphi=\dfrac{a-b}{2-a-b}$ を満たす φ がただ1つ存在して $f'(\varphi)=0$.

θ	$\cdots$	φ	$\cdots$
$f'(\theta)$	$+$	0	$-$
$f(\theta)$	$\nearrow$	$2\sqrt{2-a-b}$	$\searrow$

$f(\theta)$ の増減表は左表

$PQ+PR$ の最大値は $2\sqrt{2-a-b}$

※ $\cos\varphi=\dfrac{a-b}{2-a-b}$ より

$1-\cos\varphi=\dfrac{2-a-\cancel{b}-a+\cancel{b}}{2-a-b}=\dfrac{2(1-a)}{2-a-b}$

$1+\cos\varphi=\dfrac{2-\cancel{a}-b+\cancel{a}-b}{2-a-b}=\dfrac{2(1-b)}{2-a-b}$

$f(\varphi)=\dfrac{2(1-a)}{\sqrt{2-a-b}}+\dfrac{2(1-b)}{\sqrt{2-a-b}}$

$=2\dfrac{2-a-b}{\sqrt{2-a-b}}=2\sqrt{2-a-b}$