京大理系 1993前期 ④

(1) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき $xe^{x^2} \leqq e$ より $b_n \leqq e\int_0^1 (1+x)^{-n}dx$

$0 \leqq b_n \leqq e\int_0^1 (1+x)^{-n}dx$ —①

$\int_0^1 (1+x)^{-n}dx = \left[\frac{(1+x)^{-n+1}}{-n+1}\right]_0^1 = \frac{\frac{1}{2^{1-n}}}{1-n} - \frac{1}{1-n} = \frac{\frac{1}{2^{1-n}}-1}{1-n}$ より $\lim_{n\to\infty} e\int_0^1 (1+x)^{-n}dx = 0$ —②

①②より はさみうちの原理より $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

(2) $na_n = \int_0^1 \left\{\frac{(1+x)^{-n}}{-n}\right\}' ne^{x^2}dx = \left[-(1+x)^{-n}e^{x^2}\right]_0^1 + \int_0^1 (1+x)^{-n}\cdot e^{x^2}\cdot 2x\,dx$

$= -2^{-n}e - (-1) + 2b_n = -e\frac{1}{2^n} + 1 + 2b_n$ より

$\lim_{n\to\infty} na_n = 1$