

(1) $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ のとき $AB = BA$ のとき $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ 2a & 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2b & a \\ c+2d & c \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} a+c = a+2b & \text{--- ①} \\ b+d = a & \text{--- ②} \\ 2a = c+2d & \text{--- ③} \\ 2b = c & \text{--- ④} \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{①④より } c = 2b \\ \text{②③より } a = a-b \end{matrix} \quad \text{よって } B \text{ は } \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a-b \end{pmatrix} \text{ と表わす}$$

$B = pA + qE$ と仮定して $\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p+q & p \\ 2p & q \end{pmatrix}$ $\begin{cases} a = p+q & \text{--- ⑤} \\ b = p & \text{--- ⑥} \\ 2b = 2p & \text{--- ⑦} \\ a-b = q & \text{--- ⑧} \end{cases}$ $\begin{matrix} \text{⑥⑦より } p = b \\ \text{⑤⑧より } q = a-b \end{matrix}$

$B = bA + (a-b)E$ と仮定して題意は示された

(2) (i) C は $\begin{pmatrix} e & f \\ 2f & e-f \end{pmatrix}$ と表わす

$$BC = \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ 2f & e-f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+2bf & af+b(e-f) \\ 2af+2b(e-f) & a(e-f)+b(-e+3f) \end{pmatrix}$$

$$CB = \begin{pmatrix} e & f \\ 2f & e-f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+2bf & af+b(e-f) \\ 2af+2b(e-f) & a(e-f)+b(-e+3f) \end{pmatrix}$$

よって $BC = CB$

(3) $\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+2b^2 & 2ab-b^2 \\ 4ab-2b^2 & a^2-2ab+3b^2 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} a^2+2b^2 = 1 & \text{--- ⑨} \\ 2ab-b^2 = 0 & \text{--- ⑩} \end{cases} \quad \text{⑩⑨より } (2a-b)b = 0. \quad b=0 \text{ かつ } b=2a$$

(i) $b=0$ のとき ⑨より $a^2=1$. $a = \pm 1$

(ii) $b=2a$ のとき ⑨⑩より $9a^2=1$. $a = \pm \frac{1}{3}$. $b = \pm \frac{2}{3}$

よって $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$