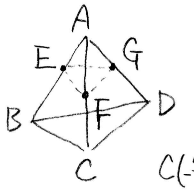
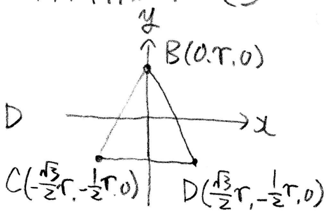
京大理系　1994前期　③

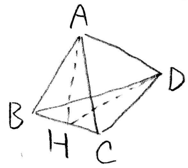


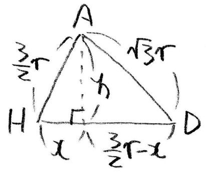


xyz空間で考える

$\triangle BCD$はxy平面上にあるとして、

B.C.Dの座標を$(0,r,0)$ $(-\frac{\sqrt3}{2}r,-\frac12 r,0)$ $(\frac{\sqrt3}{2}r,-\frac12 r,0)$とする





左図より $\frac94 r^2-\cancel{x^2}=3r^2-\frac94 r^2+3rx-\cancel{x^2}$　$\frac32 r=3x$　$x=\frac12 r$

$h^2=\frac94 r^2-\frac14 r^2=2r^2$　$h=\sqrt2 r$ より Aの座標は $(0,0,\sqrt2 r)$

$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AB}=(0,0,\sqrt2 r)+s(0,r,-\sqrt2 r)=(0,rs,-\sqrt2 rs+\sqrt2 r)$

$\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AC}=(0,0,\sqrt2 r)+t(-\frac{\sqrt3}{2}r,-\frac12 r,-\sqrt2 r)=(-\frac{\sqrt3}{2}rt,-\frac12 rt,-\sqrt2 rt+\sqrt2 r)$

$\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AD}=(0,0,\sqrt2 r)+t(\frac{\sqrt3}{2}r,-\frac12 r,-\sqrt2 r)=(\frac{\sqrt3}{2}rt,-\frac12 rt,-\sqrt2 rt+\sqrt2 r)$

$\overrightarrow{EF}=(-\frac{\sqrt3}{2}rt,-rs-\frac12 rt,\sqrt2 rs-\sqrt2 rt)$

$\overrightarrow{EG}=(\frac{\sqrt3}{2}rt,-rs-\frac12 rt,\sqrt2 rs-\sqrt2 rt)$

$$\begin{array}{cccc}
-\frac{\sqrt3}{2}t & -s-\frac12 t & \sqrt2 s-\sqrt2 t & -\frac{\sqrt3}{2}t \\
\frac{\sqrt3}{2}t & -s-\frac12 t & \sqrt2 s-\sqrt2 t & \frac{\sqrt3}{2}t \\
\hline
-\sqrt3 t(-s-\frac12 t) & 0 & (\sqrt2 s-\sqrt2 t)\sqrt3 t & \\
=\sqrt3(s+\frac12 t)t & & =\sqrt6(s-t)t &
\end{array}$$

$\frac{\overrightarrow{EF}}{r}\times\frac{\overrightarrow{EG}}{r}=(0,\sqrt6(s-t)t,\sqrt3(s+\frac12 t)t)$

E.F.Gを通る平面の方程式は $\overset{\sqrt2}{\cancel{\sqrt6}}(s-t)\cancel{t}(y-rs)+\cancel{\sqrt3}(s+\frac12 t)\cancel{t}(z+\sqrt2 rs-\sqrt2 r)=0$

これとxy平面の交わりは $\sqrt2(s-t)(y-rs)+(s+\frac12 t)\sqrt2 r(s-1)=0$

$s\neq t$としてよいから $y=\frac{-s^2+s-\frac12 st+\frac12 t}{s-t}r+sr=\frac{\cancel{-s^2}+s-\frac12 st+\frac12 t+\cancel{s^2}-st}{s-t}r=\frac{s-\frac32 st+\frac12 t}{s-t}r$ より $y=\frac{s-\frac32 st+\frac12 t}{s-t}r$

$\left|\frac{s-\frac32 st+\frac12 t}{s-t}\right|\leqq 1$ であればよい. $s-\frac32 st+\frac12 t=\frac{2s-2st-st+t}{2}=\frac{2s(1-t)+(1-s)t}{2}>0$

(i) $s>t$のとき $\frac{s-\frac32 st+\frac12 t}{s-t}\leqq 1$, $\cancel{s}-\frac32 st+\frac12 t\leqq\cancel{s}-t$, $\frac32 t\leqq\frac32 s\cancel{t}$ であればよいが、これは不適

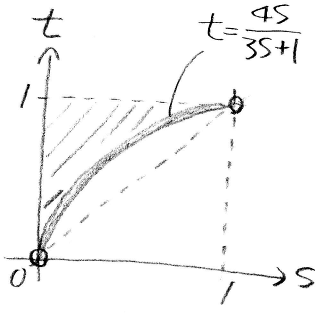
(ii) $s<t$のとき $\frac{s-\frac32 st+\frac12 t}{t-s}\leqq 1$, $s-\frac32 st+\frac12 t\leqq t-s$　$2s\leqq(\frac32 s+\frac12)t$, $t\geqq\frac{4s}{3s+1}$ であればよい.

$f(s)=\frac{4s}{3s+1}$ $(0\leqq s\leqq 1)$ とする

$f'(s)=\frac{4(3s+1)-4s\cdot 3}{(3s+1)^2}=\frac{4}{(3s+1)^2}>0$ より $f(s)$は単調増加

$f''(s)=\frac{-4\cdot 2(3s+1)\cdot 3}{(3s+1)^{\cancel{4}3}}<0$より $f(s)$は上に凸

$f(0)=0$, $f(1)=1$



以上より点(s,t)の範囲は右図の斜線部と太線部

※ $s=0$上の点と $t=1$上の点は含まない