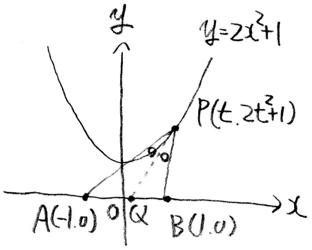
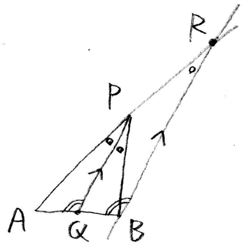
京大理系 1994前期 ④





PQに平行でBを通る直線と直線APの交点をRとすると

△APQ∽△ARB

$\frac{AP}{AQ}=\frac{AR}{AB}$, $\frac{AP}{AQ}=\frac{AP+PR}{AQ+QB}$, $AP\cdot QB=AQ\cdot PR$, $\frac{QB}{AQ}=\frac{PR}{AP}$ —①

∠QPB=∠RBPより △PBRは二等辺三角形 より PR=PB

①より $\frac{QB}{AQ}=\frac{BP}{AP}$ —②

$$f(t)=\frac{BP^2}{AP^2}=\frac{(t-1)^2+(2t^2+1)^2}{(t+1)^2+(2t^2+1)^2}=\frac{4t^4+5t^2-2t+2}{4t^4+5t^2+2t+2}=\frac{4t^4+5t^2+2t+2-4t}{4t^4+5t^2+2t+2}=1-4\frac{t}{4t^4+5t^2+2t+2}$$ とする

$$f'(t)=-4\frac{4t^4+5t^2+2t+2-t(16t^3+10t+2)}{(4t^4+5t^2+2t+2)^2}=-4\frac{-12t^4-5t^2+2}{(4t^4+5t^2+2t+2)^2}=4\frac{12t^4+5t^2-2}{(4t^4+5t^2+2t+2)^2}$$

$12\times 8=96$

$f'(t)=0$ のとき、$t^2=\frac{-5\pm\sqrt{25+96}}{24}=\frac{-5\pm 11}{24}=-\frac{2}{3}, \frac{1}{4}$. $t=\pm\frac{1}{2}$

t	$-\infty$	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	∞
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$	1	↗	$\frac{9}{5}$	↘	$\frac{5}{9}$	↗	1

$f(t)$の増減表は左表

$f(t)$の最大値は $\frac{9}{5}$、最小値は $\frac{5}{9}$

※ $f(t)=\frac{4+\frac{5}{t^2}-\frac{2}{t^3}+\frac{2}{t^4}}{4+\frac{5}{t^2}+\frac{2}{t^3}+\frac{2}{t^4}}$ より $\lim_{t\to\pm\infty}f(t)=1$

$f(-\frac{1}{2})=\frac{4\frac{1}{16}+5\frac{1}{4}+3}{4\frac{1}{16}+5\frac{1}{4}+1}=\frac{1+5+12}{1+5+4}=\frac{18}{10}=\frac{9}{5}$

$f(\frac{1}{2})=\frac{4\frac{1}{16}+5\frac{1}{4}+1}{4\frac{1}{16}+5\frac{1}{4}+3}=\frac{1+5+4}{1+5+12}=\frac{10}{18}=\frac{5}{9}$

②より $\frac{QB}{AQ}$の最大値は $\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$、最小値は $\frac{\sqrt{5}}{3}$