京大理系　1995前期　②

$\alpha=(a-b)(a^{p-1}+a^{p-2}b+\cdots+ab^{p-2}+b^{p-1})$

αは素数，$a^{p-1}+a^{p-2}b+\cdots+ab^{p-2}+b^{p-1}>1$，であるから，$a-b=1$，$a$. bの奇偶は異なる

(i) aが偶数のとき

$\alpha=a^p-(a-1)^p=-\sum_{k=1}^{p}{}_pC_k\,a^{p-k}(-1)^k=-\sum_{k=1}^{p-1}{}_pC_k\,a^{p-k}(-1)^k+1$ —①

pは奇数であるから $(-1)^p=-1$

a^{p-k} $(1\leqq k\leqq p-1)$は偶数であるから２で割りきれる —②

${}_pC_k=\dfrac{p!}{(p-k)!\,k!}=p\dfrac{(p-1)!}{(p-k)!\,k!}$

pは素数より $1\leqq k\leqq p-1$のとき，$(p-k)!\,k!$は素因数にpを持たない

ところで${}_pC_k$は整数であるから $\dfrac{(p-1)!}{(p-k)!\,k!}$は整数

よって${}_pC_k$はpで割りきれる —③

①②③より題意は示された．

(ii) bが偶数のとき．

$\alpha=(b+1)^p-b^p=\sum_{k=1}^{p}{}_pC_k\,b^{p-k}=\sum_{k=1}^{p-1}{}_pC_k\,b^{p-k}+1$ —④

b^{p-k} $(1\leqq k\leqq p-1)$は偶数であるから２で割りきれる —⑤

(i)と同様にして，${}_pC_k$はpで割りきれることがわかる —⑥

④⑤⑥より題意は示された．