京大理系　1995前期　④

$n \geqq 3$とする

C_nはいくつかのAABAとBABAの積である —①

$$AABA=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

$$(AABA)^2=\begin{pmatrix}-1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$BABA=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

②

C_3にはAABAが奇数個ある —③

C_kにAABAがα個，BABAがβ個あるとき

C_{k+1}ではAABAはBABAAABA，BABAはAABAAABAとなるから
AABAが$\alpha+2\beta$個，BABAがα個ある

よって，C_kにAABAが奇数個あるとき，C_{k+1}にAABAが奇数個ある —④

③④より，数学的帰納法より，C_nにはAABAが奇数個ある —⑤

①②⑤より $C_n=\begin{pmatrix}-1&1\\0&1\end{pmatrix}$