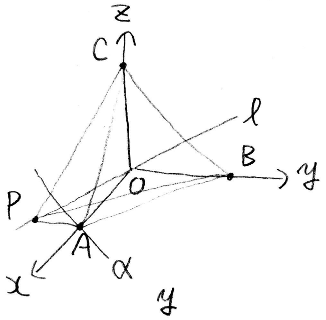
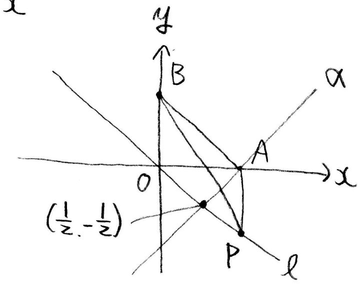
京大理系 1996前期 ②





ℓの方向ベクトルは $(1, -1, 0)$ より

αの方程式は $x-1-y=0$, $y=x-1$

4面体ABCPと平面αが交わってできる図形は3角形

BPの方程式は $y=-\frac{t+1}{t}x+1$

$x-1=-\frac{t+1}{t}x+1$, $\frac{2t+1}{t}x=2$, $x=\frac{2t}{2t+1}$, $y=\frac{2t-2t-1}{2t+1}=\frac{-1}{2t+1}$ より

BPとαの交点は $\left(\frac{2t}{2t+1}, \frac{-1}{2t+1}, 0\right)$

3角形の底辺は $\sqrt{\left(\frac{\cancel{2t-2t}-1}{2t+1}\right)^2+\left(\frac{-1}{2t+1}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2t+1}$ —①

CPの方程式は $(0, 0, 1)+s(t, -t, -1)=(st, -st, -s+1)$

$-st=st-1$, $2st=1$, $s=\frac{1}{2t}$ より

CPとαの交点は $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2t}+1\right)$

3角形の高さは $-\frac{1}{2t}+1$ —②

①②より $S(t)=\frac{\sqrt{2}}{2t+1}\,\frac{2t-1}{2t}\,\frac{1}{2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\,\frac{2t-1}{2t^2+t}$

$S'(t)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\,\frac{2(2t^2+t)-(2t-1)(4t+1)}{(2t^2+t)^2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\,\frac{4t^2+\cancel{2t}-8t^2-\cancel{2t}+4t+1}{(2t^2+t)^2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\,\frac{-4t^2+4t+1}{(2t^2+t)^2}$

$S'(t)=0$ のとき $4t^2-4t-1=0$, $t=\frac{2\pm\sqrt{4+4}}{4}=\frac{2\pm2\sqrt{2}}{4}=\frac{1\pm\sqrt{2}}{2}$, $t>\frac{1}{2}$ より $t=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$

t	$\frac{1}{2}$	…	$\frac{1+\sqrt{2}}{2}$	…
$S'(t)$		+	0	−
$S(t)$		↗	$-2+\frac{3}{2}\sqrt{2}$	↘

$S(t)$の増減表は左表

よって, $S(t)$の最大値は $-2+\frac{3}{2}\sqrt{2}$

※ $S\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\,\frac{\cancel{1}+\sqrt{2}-\cancel{1}}{2\frac{1+2\sqrt{2}+2}{4}+\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$

$=\frac{1}{2}\,\frac{1}{\frac{4+3\sqrt{2}}{2}}=\frac{4-3\sqrt{2}}{(4+3\sqrt{2})(4-3\sqrt{2})}$

$=\frac{4-3\sqrt{2}}{16-18}=-2+\frac{3}{2}\sqrt{2}$