京大理系　1996前期　③

fを表す行列を $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $a+d=\alpha$, $ad-bc=\beta$ とする.

f^3を表す行列は. $A^3=(\alpha A-\beta E)A=\alpha(\alpha A-\beta E)-\beta A=(\alpha^2-\beta)A-\alpha\beta E$ —①

$\vec{v}$は $f^3(\vec{v})=\vec{v}$ を満たすとすると. $\{(\alpha^2-\beta)A-\alpha\beta E\}\vec{v}=\vec{v}$, $(\alpha^2-\beta)A\vec{v}=(\alpha\beta+1)\vec{v}$

$\alpha^2-\beta\neq 0$ のとき. $f(\vec{v})=k\vec{v}$ (kはある実数), より $f^3(\vec{v})=k^3\vec{v}$.

$k^3=1$ のとき $k=1$ より. $f(\vec{v})\neq\vec{v}$ に矛盾. よって $\alpha^2-\beta=0$. —②

$\vec{v}=\vec{0}$ のとき $f(\vec{v})=\vec{v}$ より $f(\vec{v})\neq\vec{v}$ に矛盾. よって $\vec{v}\neq\vec{0}$. $\alpha\beta+1=0$ —③

①②③より. f^3を表す行列は E であるから 題意は示された.