京大理系 1996前期 ④

(1) $a_n=a_{n+1}$ のとき $a_{n+2}=\left[\frac{a_{n+1}+k}{3}\right]=\left[\frac{a_n+k}{3}\right]=a_{n+1}$ より $a_n=a_{n+2}$

これを繰り返すことにより $a_n=a_{n+1}$ ならば $n$ 以上のすべての整数 $m$ に対し $a_n=a_m$ であることがわかる.

$k=8$ のとき $a_2=\left[\frac{0+8}{3}\right]=2$, $a_3=\left[\frac{2+8}{3}\right]=3$, $a_4=\left[\frac{3+8}{3}\right]=3$ より $a_1=0$, $a_2=2$, $n\geqq 3$ のとき $a_n=3$

$k=9$ のとき $a_2=\left[\frac{0+9}{3}\right]=3$, $a_3=\left[\frac{3+9}{3}\right]=4$, $a_4=\left[\frac{4+9}{3}\right]=4$ より $a_1=0$, $a_2=3$, $n\geqq 3$ のとき $a_n=4$

(2) $a_1\leqq\frac{k-1}{2}$ —①

$a_l\leqq\frac{k-1}{2}$ のとき $a_{l+1}=\left[\frac{a_l+k}{3}\right]\leqq\left[\frac{\frac{k-1}{2}+k}{3}\right]=\left[\frac{k}{2}-\frac{1}{6}\right]$

$k$ が奇数のとき $k=2\alpha+1$ $(\alpha=0,1,\cdots)$ とおくと $\left[\frac{k}{2}-\frac{1}{6}\right]=\left[\alpha+\frac{1}{3}\right]=\alpha$

また $\frac{k-1}{2}=\alpha$ より $a_{l+1}\leqq\frac{k-1}{2}$

$k$ が偶数のとき $k=2\beta$ $(\beta=1,2,\cdots)$ とおくと $\left[\frac{k}{2}-\frac{1}{6}\right]=\left[\beta-\frac{1}{6}\right]=\beta-1$

また $\frac{k-1}{2}=\beta-\frac{1}{2}$ より $a_{l+1}\leqq\frac{k-1}{2}$

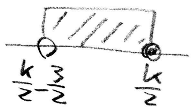
②

①②より数学的帰納法より題意は示された.

$$a_{n+1}=\left[\frac{a_n+k}{3}\right]\geqq\left[\frac{a_n+2a_n+1}{3}\right]=\left[a_n+\frac{1}{3}\right]=a_n \quad \text{より} \quad a_n\leqq a_{n+1}$$

(3) (1)より $a_n=a_{n+1}$ ならば $n$ 以上のすべての整数 $m$ に対し $a_n=a_m$ である

$\left[\frac{a_n+k}{3}\right]$ は $2a_n\leqq k<2a_n+3$, $a_n\leqq\frac{k}{2}$ かつ $a_n>\frac{k-3}{2}$ のとき $a_n$ である




$k$ が奇数のとき $\frac{k}{2}-\frac{3}{2}$ と $\frac{k}{2}$ の間にある最小の整数は $\frac{k}{2}-\frac{1}{2}$

$k$ が偶数のとき $\frac{k}{2}-\frac{3}{2}$ と $\frac{k}{2}$ の間にある最小の整数は $\frac{k}{2}-1$

よって $a_n=\begin{cases}\frac{k}{2}-\frac{1}{2} & (k\text{が奇数のとき})\\ \frac{k}{2}-1 & (k\text{が偶数のとき})\end{cases}$