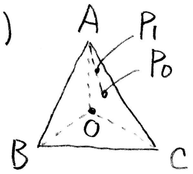
京大理系 1996前期 ⑤

(1)



Aを選んだとき $\overrightarrow{OP_1}=\overrightarrow{OP_0}+\frac{1}{2}\overrightarrow{P_0A}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OP_0}$

$|\overrightarrow{OP_1}|^2=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OP_0}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OP_0}\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP_0}+\frac{1}{4}|\overrightarrow{OP_0}|^2$

同様にして，Bを選んだとき $|\overrightarrow{OP_1}|^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP_0}+\frac{1}{4}|\overrightarrow{OP_0}|^2$，Cを選んだとき $|\overrightarrow{OP_1}|^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OP_0}+\frac{1}{4}|\overrightarrow{OP_0}|^2$

$E_1=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{OP_0}+\frac{1}{4}|\overrightarrow{OP_0}|^2$，$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ より $E_1=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}|\overrightarrow{OP_0}|^2$

(2) $\overrightarrow{OP_n}=\overrightarrow{OP_{n-1}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{P_{n-1}X_n}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OX_n}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OP_{n-1}}$

$\overrightarrow{OP_{n-1}}=\overrightarrow{OP_{n-2}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{P_{n-2}X_{n-1}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OX_{n-1}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OP_{n-2}}$ より $\overrightarrow{OP_n}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OX_n}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OX_{n-1}}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OP_{n-2}}$

これを繰り返すことにより $\overrightarrow{OP_n}=\left(\frac{1}{2}\right)^1\overrightarrow{OX_n}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\overrightarrow{OX_{n-1}}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n\overrightarrow{OX_1}+\left(\frac{1}{2}\right)^n\overrightarrow{OP_0}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1-k}\overrightarrow{OX_k}+\left(\frac{1}{2}\right)^n\overrightarrow{OP_0}$

(3) 選んだ頂点が $X_1, X_2 \cdots X_n$ のとき $\overrightarrow{OP_n}=\overrightarrow{OP_{n-1}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{P_{n-1}X_n}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OX_n}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OP_{n-1}}$

$X_1, X_2 \cdots X_n$ がすべての場合をとるときの和を $\sum_n$ と書く

$X_1, X_2 \cdots X_{n-1}$ 〃 $\sum_{n-1}$ 〃

$$E_n=\frac{\sum_n|\overrightarrow{OP_n}|^2}{3^n}=\frac{\sum_n\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OX_n}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OP_{n-1}}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OX_n}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OP_{n-1}}\right)}{3^n}=\frac{\sum_n\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OX_n}\cdot\overrightarrow{OP_{n-1}}+\frac{1}{4}|\overrightarrow{OP_{n-1}}|^2\right)}{3^n}$$

$$=\frac{\frac{1}{4}3^n+\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\cdot\sum_{n-1}\overrightarrow{OP_{n-1}}+\frac{3}{4}\sum_{n-1}|\overrightarrow{OP_{n-1}}|^2}{3^n}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\frac{\sum_{n-1}|\overrightarrow{OP_{n-1}}|^2}{3^{n-1}}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}E_{n-1}$$

$E_n-\frac{1}{3}=\frac{1}{4}\left(E_{n-1}-\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(E_{n-2}-\frac{1}{3}\right)=\cdots=\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\left(E_1-\frac{1}{3}\right)$

$x=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}x$
$x=\frac{1}{3}$

(1)より $E_1=\frac{1}{4}$ より $E_n=-\frac{1}{12}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n+\frac{1}{3}$