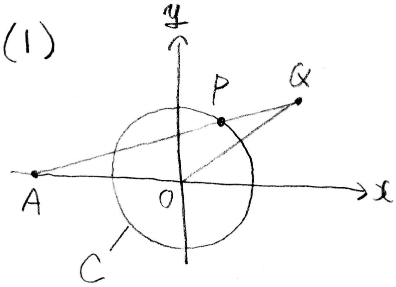
京大理系 1997前期 ①

(1)



Pの座標を$(\cos\theta, \sin\theta)$とする

$\overline{AP}=\sqrt{(\cos\theta+2)^2+\sin^2\theta}=\sqrt{4\cos\theta+5}$ —①

$\overrightarrow{AP}$と同じ向きの単位ベクトルは $\left(\frac{\cos\theta+2}{s}, \frac{\sin\theta}{s}\right)$ より

Qの座標は $(\cos\theta, \sin\theta)+\frac{3}{s}\left(\frac{\cos\theta+2}{s}, \frac{\sin\theta}{s}\right)=\left(\left(\frac{3}{s^2}+1\right)\cos\theta+\frac{6}{s^2}, \left(\frac{3}{s^2}+1\right)\sin\theta\right)$

よって $t^2=\left(\frac{3}{s^2}+1\right)^2\cos^2\theta+\frac{12}{s^2}\left(\frac{3}{s^2}+1\right)\cos\theta+\frac{36}{s^4}+\left(\frac{3}{s^2}+1\right)^2\sin^2\theta$

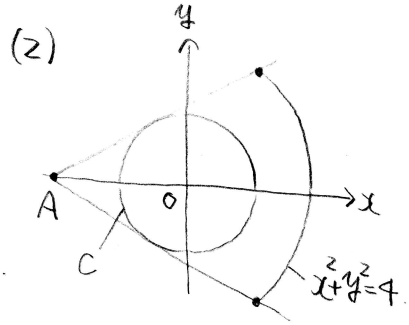
$=\left(\frac{3}{s^2}+1\right)^2+\left(\frac{9}{s^4}+\frac{3}{s^2}\right)(s^2-5)+\frac{36}{s^4}$

※①より $4\cos\theta=s^2-5$

$=\cancel{\frac{9}{s^4}}+\cancel{\frac{6}{s^2}}+1+\cancel{\frac{9}{s^2}}-\cancel{\frac{45}{s^4}}+3-\cancel{\frac{15}{s^2}}+\cancel{\frac{36}{s^4}}=4$

$t=2$

(2)



Aを通る直線の方程式は $y=k(x+2)$

これがCに接するとき

$x^2+k^2(x^2+4x+4)=1$, $(k^2+1)x^2+4k^2x+4k^2-1=0$ が重解を持つから

$4k^4-(k^2+1)(4k^2-1)=0$, $-3k^2+1=0$ $k=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

$y=\frac{1}{\sqrt{3}}(x+2)$ と $x^2+y^2=4$ の A以外の交点は

$x^2+\frac{1}{3}(x^2+4x+4)=4$, $4x^2+4x-8=0$ $x^2+x-2=0$

$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm3}{2}=-2, 1$, $y=0, \sqrt{3}$ より $(1, \sqrt{3})$

これらと(1)より点Qの描く軌跡は

右図の太線部