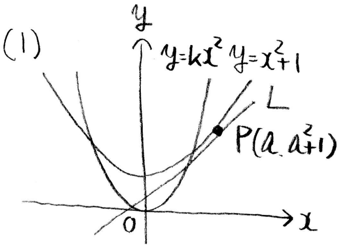
京大理系 1997前期 ③

(1)



$y=x^2+1$ と $y=kx^2$ の交点の x 座標は

$x^2+1=kx^2$, $x^2=\frac{1}{k-1}$, $x=\pm\frac{1}{\sqrt{k-1}}$ より $\pm\frac{1}{\sqrt{k-1}}$

$y=x^2+1$ と $y=kx^2$ で囲まれた部分の面積は

$$2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{k-1}}}(x^2+1-kx^2)dx=2\left[-(k-1)\frac{x^3}{3}+x\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{k-1}}}=-\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{k-1}}+2\frac{1}{\sqrt{k-1}}=\frac{4}{3\sqrt{k-1}}$$

L の方程式は $y-a^2-1=2a(x-a)$, $y=2ax-a^2+1$

L と $y=kx^2$ の交点の x 座標を α, β $(\alpha<\beta)$ とすると $2ax-a^2+1=kx^2$, $kx^2-2ax+a^2-1=0$ —① より

$\alpha+\beta=\frac{2a}{k}$, $\alpha\beta=\frac{a^2-1}{k}$, $(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\frac{4a^2}{k^2}-\frac{4a^2-4}{k}=\frac{4a^2-4a^2k+4k}{k^2}$ —②

ここで①は異なる2つの実数解を持つから $a^2-k(a^2-1)>0$. よって②より $\beta-\alpha=\frac{2}{k}\sqrt{-(k-1)a^2+k}$

$y=x^2+1$ と $y=kx^2$ で囲まれた部分のうち L の下側にある部分の面積は

$$\int_\alpha^\beta(2ax-a^2+1-kx^2)dx=-k\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=\frac{k}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{k}{\cancel{6}_{3}}\frac{\cancel{8}^{4}}{\cancel{k^3}_{k^2}}\{-(k-1)a^2+k\}^{\frac{3}{2}}$$

$\frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{3}k^2}\{-(k-1)a^2+k\}^{\frac{3}{2}}=\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}\sqrt{k-1}}$ より $\{-(k-1)a^2+k\}^{\frac{3}{2}}=\frac{k^2}{2\sqrt{k-1}}$ $\quad -(k-1)a^2+k=\frac{k^{\frac{4}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}(k-1)^{\frac{1}{3}}}$

$(k-1)a^2=k-\frac{k^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{4}(k-1)^{\frac{1}{3}}}$, $\quad a^2=\frac{k}{k-1}-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\left(\frac{k}{k-1}\right)^{\frac{4}{3}}$

(2) $\lim_{k\to\infty}a^2=\lim_{k\to\infty}\left\{\frac{k-1+1}{k-1}-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\left(\frac{k-1+1}{k-1}\right)^{\frac{4}{3}}\right\}=\lim_{k\to\infty}\left\{1+\frac{1}{k-1}-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\left(1+\frac{1}{k-1}\right)^{\frac{4}{3}}\right\}=1-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$