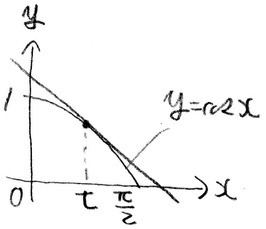
京大理系 1997前期 ⑥

(1)



接線の方程式は $y-\cos t=-\sin t(x-t)$

これと x 軸の交点の x 座標は $\frac{\cos t}{\sin t}+t$

これと y 軸の交点の y 座標は $t\sin t+\cos t$

よって $S(t)=\left(\frac{\cos t}{\sin t}+t\right)(t\sin t+\cos t)\frac{1}{2}=\frac{t\sin t+\cos t}{\sin t}(t\sin t+\cos t)\frac{1}{2}=\frac{(t\sin t+\cos t)^2}{2\sin t}$

(2) $S'(t)=\frac{2(t\sin t+\cos t)(\cancel{\sin t}+t\cos t-\cancel{\sin t})2\sin t-(t\sin t+\cos t)^2\cancel{2}\cos t}{\cancel{2}4\sin^2 t}$

$=\frac{(t\sin t+\cos t)(2t\sin t\cos t-t\sin t\cos t-\cos^2 t)}{2\sin^2 t}=\frac{(t\sin t+\cos t)(t\sin t-\cos t)\cos t}{2\sin^2 t}$

$f(t)=t\sin t$, $g(t)=\cos t$ とする

$f(t)$ は $\frac{\pi}{4}<t<\frac{\pi}{2}$ で単調増加、$g(t)$ は $\frac{\pi}{4}<t<\frac{\pi}{2}$ で単調減少

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}\frac{1}{\sqrt{2}}$, $g\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$ より $f\left(\frac{\pi}{4}\right)<g\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$, $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ より $f\left(\frac{\pi}{2}\right)>g\left(\frac{\pi}{2}\right)$

よって $\frac{\pi}{4}<t<\frac{\pi}{2}$ で $f(t)=g(t)$ となる t がただ1つ存在する。これを t_0 とする

t	0	…	$\frac{\pi}{4}$	…	t_0	…	$\frac{\pi}{2}$
$S'(t)$		−	−	−	0	+	
$S(t)$		↘		↘	最小	↗	

$S(t)$ の増減表は左表

よって題意は示された。

(3) $S(t_0)=\frac{(t_0\sin t_0+\cos t_0)^2}{2\sin t_0}$

(2)より $t_0\sin t_0=\cos t_0$ より $S(t_0)=\frac{\cancel{4}^{2}\cos^2 t_0}{\cancel{2}\sin t_0}=2t_0\cos t_0$

$h(t)=2t\cos t$ とする。

$h'(t)=2\cos t-2t\sin t=2(\cos t-t\sin t)$

t	0	…	$\frac{\pi}{4}$	…	t_0	…	$\frac{\pi}{2}$
$h'(t)$		+	+	+	0	−	
$h(t)$		↗	$\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$	↗	$2t_0\cos t_0$	↘	

(2)より $h(t)$ の増減表は左表

よって $2t_0\cos t_0>\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$, $S(t_0)>\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$