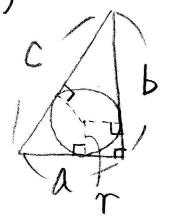
京大理系　1998前期 ①

(1)



左図のような三角形を考える

$a^2+b^2=c^2$ —①

$\frac{1}{2}ab=r^2+(a-r)r+(b-r)r$，$\frac{1}{2}ab=(a+b)r-r^2$ —②

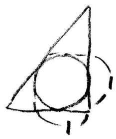
$a+b+c+2r=2$ —③

①より $(a+b)^2-2ab=c^2$ —①'

①'②より $(a+b)^2-4r(a+b)+4r^2-c^2=0$．$a+b=2r\pm\sqrt{4r^2-4r^2+c^2}=2r\pm c$

$a+b=2r+c$ のとき．③より $2r+c+c+2r=2$．$c=-2r+1$

$a+b=2r-c$ のとき ③より $2r-\cancel{c}+\cancel{c}+2r=2$ ．$r=\frac{1}{2}$．このとき左図より $a+b+c+2r>2$ より不適



よって．$c=-2r+1$

(2). $c>0$．$-2r+1>0$．$r<\frac{1}{2}$ —④

$a+b=-c-2r+2=2r-1-2r+2=1$

$ab=-2r^2+2r$

よって．a. b は2次方程式 $x^2-x-2r^2+2r=0$ —⑤の解

⑤は $(x-\frac{1}{2})^2-2r^2+2r-\frac{1}{4}=0$ と書けるから ⑤が正の実数解を2つ持つためには．

$-2r^2+2r>0$ かつ $-2r^2+2r-\frac{1}{4}\leqq 0$．

$r(r-1)<0$ かつ $8r^2-8r+1\geqq 0$．

$0<r<1$，かつ，$r\leqq\frac{2-\sqrt{2}}{4}$ または $r\geqq\frac{2+\sqrt{2}}{4}$ —⑥

※ $8r^2-8r+1=0$ のとき

$r=\frac{4\pm\sqrt{16-8}}{8}=\frac{4\pm2\sqrt{2}}{8}=\frac{2\pm\sqrt{2}}{4}$

④⑥より．$0<r\leqq\frac{2-\sqrt{2}}{4}$

三角形の面積は $\frac{1}{2}ab=-r^2+r=-(r-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}$

求める値は $-\left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right)^2+\frac{2-\sqrt{2}}{4}=\frac{-4+4\sqrt{2}-2}{16}+\frac{2-\sqrt{2}}{4}=\frac{-3+\cancel{2\sqrt{2}}+4-\cancel{2\sqrt{2}}}{8}=\frac{1}{8}$