京大理系 1998前期 ②

(1) $f(a)=2^n\cdot\alpha$ (αは整数) と書ける.

(i) αが偶数のとき. $f(a)=2^n\cdot 2\beta=2^{n+1}\cdot\beta$ (βは整数) より. $f(a)$は2^{n+1}の倍数

(ii) αが奇数のとき. $f(a+2^{n-1})=(a+2^{n-1})^2+7=f(a)+2^n\cdot a+2^{2n-2}$

$f(a)=2^n(2\gamma+1)=2^{n+1}\cdot\gamma+2^n$ (γは整数) より.

$f(a+2^{n-1})=2^{n+1}\cdot\gamma+2^n+2^n\cdot a+2^{2n-2}=2^{n+1}\cdot\gamma+2^n(a+1)+2^{2n-2}$ —①

$f(a)=a^2+7$は2^nの倍数であるから偶数, a^2は奇数, aは奇数, $a+1$は偶数 —②

$2n-2\geqq n+1$のとき. $n\geqq 3$ —③

①②③より. $f(a+2^{n-1})$は2^{n+1}の倍数

(i)(ii)より. 題意は示された.

(2) $f(1)=1+7=8=4\cdot 2^1$より. $f(1)$は2^1の倍数であるから $a_1=1$ とする.
$f(1)=2\cdot 2^2$より. $f(1)$は2^2の倍数であるから $a_2=1$ とする.
$f(1)=2^3$より. $f(1)$は2^3の倍数であるから. $a_3=1$ とする
—④

$k\geqq 3$とする.
$f(a_k)$が2^kの倍数であると仮定する
(1)より $\begin{cases} f(a_k)\text{が}2^{k+1}\text{の倍数であるとき, } a_{k+1}=a_k\text{とする} \\ f(a_k+2^{k-1})\text{が}2^{k+1}\text{の倍数であるとき. } a_{k+1}=a_k+2^{k-1}\text{とする}\end{cases}$
—⑤

④⑤より. 数学的帰納法より. 題意は示された.