京大理系 1999前期 ③

(1) $\dfrac{b_1^2}{a_0^2+1}+\dfrac{a_i^2}{b_0^2+1}-\dfrac{a_i^2}{a_0^2+1}-\dfrac{b_i^2}{b_0^2+1}=\dfrac{b_i^2-a_i^2}{a_0^2+1}-\dfrac{b_i^2-a_i^2}{b_0^2+1}=\dfrac{(b_i^2-a_i^2)(b_0^2+1-a_0^2-1)}{(a_0^2+1)(b_0^2+1)}>0$ より

題意は示された.

(2) $x_1, x_2 \cdots x_n$ は $1, 2 \cdots n$ を並べ換えたものである.

$x_1 \neq 1$ のとき $x_\alpha=1$ であるとすると. (1)より $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^2}{k^2+1}=\frac{x_1^2}{1^2+1}+\frac{1^2}{\alpha^2+1}+\cdots+\frac{x_n^2}{n^2+1}>\frac{1^2}{1^2+1}+\frac{x_1^2}{\alpha^2+1}+\cdots+\frac{x_n^2}{n^2+1}$

よって. $y_2, y_3 \cdots y_n$ を $x_i \neq 1$ のとき $y_i=x_i$, $x_i=1$ のとき $y_i=x_1$ で定義すると.

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^2}{k^2+1} \geqq \frac{1^2}{1^2+1}+\sum_{k=2}^{n}\frac{y_k^2}{k^2+1}$$

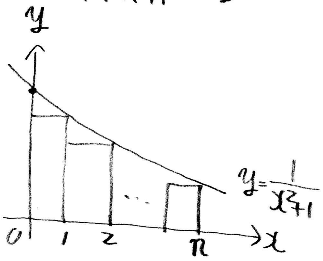
$y_2 \neq 2$ のとき, $y_\beta=2$ であるとすると (1)より. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^2}{k^2+1} \geqq \frac{1^2}{1^2+1}+\frac{y_2^2}{2^2+1}+\frac{2^2}{\beta^2+1}+\cdots+\frac{y_n^2}{n^2+1}>\frac{1^2}{1^2+1}+\frac{2^2}{2^2+1}+\frac{y_2^2}{\beta^2+1}+\cdots+\frac{y_n^2}{n^2+1}$

よって. $z_3, z_4 \cdots z_n$ を $y_i \neq 2$ のとき $y_i=z_i$, $y_i=2$ のとき $z_i=y_2$ で定義すると

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^2}{k^2+1} \geqq \frac{1^2}{1^2+1}+\frac{2^2}{2^2+1}+\sum_{k=3}^{n}\frac{z_k^2}{k^2+1}$$

これを繰り返すことにより. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^2}{k^2+1} \geqq \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{k^2+1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+1-1}{k^2+1}=n-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+1}$

よって $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+1}<\frac{8}{5}$ を示せばよい.



左図より. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+1}<\int_0^n\frac{1}{x^2+1}dx=\int_0^{\theta_n}\frac{1}{\tan^2\theta+1}\,\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

↓

$x=\tan\theta$ とおく. $\begin{array}{c|c} x & 0 \to n \\ \theta & 0 \to \theta_n \end{array}$. $\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{\cos\theta\cos\theta+\sin\theta\sin\theta}{\cos^2\theta}=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

θ_n は. $\tan\theta_n=n$. $0<\theta_n<\frac{\pi}{2}$ を満たす値

$$=\int_0^{\theta_n}\frac{1}{\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos^2\theta}}\,\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=\Big[\theta\Big]_0^{\theta_n}=\theta_n<\frac{\pi}{2}=\frac{\frac{5}{2}\pi}{5}$$

$$<\frac{2.5\times3.15}{5}=\frac{7.875}{5}<\frac{8}{5}.$$

```
  3.15
×  2.5
------
 1575
 630
------
7.875
```