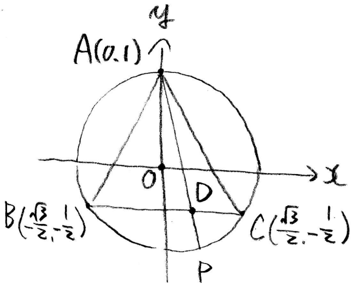
京大理系 2000前期 ①



xy平面上の中心$(0,0)$半径1の円を考える

これに内接する正三角形ABCを考え $A(0,1)$, $B\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $C\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ とする

これを問の円, 三角形と考えてよい.

APとBCの交点をDとすると $D\left(\sqrt{3}p-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

直線AD上の点は $(0,1)+t\left(\sqrt{3}p-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right)=\left(\left(p-\frac{1}{2}\right)\sqrt{3}t, -\frac{3}{2}t+1\right)$ と書ける

これが $x^2+y^2=1$ 上にあるとき $\left(p-\frac{1}{2}\right)^2 3t^2+\frac{9}{4}t^2-3t+\cancel{1}=\cancel{1}$

$t\neq 0$として $(p^2-p+1)t=1$. $t=\frac{1}{p^2-p+1}$

Pの座標は $\left(\frac{\sqrt{3}\left(p-\frac{1}{2}\right)}{p^2-p+1}, \frac{-\frac{3}{2}+p^2-p+1}{p^2-p+1}\right)=\left(\frac{\sqrt{3}\left(p-\frac{1}{2}\right)}{p^2-p+1}, \frac{p^2-p-\frac{1}{2}}{p^2-p+1}\right)$

$$\overrightarrow{AP}=\left(\frac{\sqrt{3}\left(p-\frac{1}{2}\right)}{p^2-p+1}, \frac{\cancel{p^2}-\cancel{p}-\frac{1}{2}-\cancel{p^2}+\cancel{p}-1}{p^2-p+1}\right)=\left(\frac{\sqrt{3}\left(p-\frac{1}{2}\right)}{p^2-p+1}, \frac{-\frac{3}{2}}{p^2-p+1}\right)$$

$\overrightarrow{AP}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}=\alpha\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right)+\beta\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ のとき

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{3}\left(p-\frac{1}{2}\right)}{p^2-p+1}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\alpha+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\beta, & \dfrac{2p-1}{p^2-p+1}=-\alpha+\beta \\ \dfrac{-\frac{3}{2}}{p^2-p+1}=-\dfrac{3}{2}\alpha-\dfrac{3}{2}\beta, & \dfrac{1}{p^2-p+1}=\alpha+\beta \end{cases}$$

$$\frac{2p-1-1}{p^2-p+1}=-2\alpha \qquad \alpha=\frac{-p+1}{p^2-p+1}$$

$$\frac{2p-\cancel{1}+\cancel{1}}{p^2-p+1}=2\beta \qquad \beta=\frac{p}{p^2-p+1}$$

$$\overrightarrow{AP}=\frac{-p+1}{p^2-p+1}\overrightarrow{AB}+\frac{p}{p^2-p+1}\overrightarrow{AC}$$