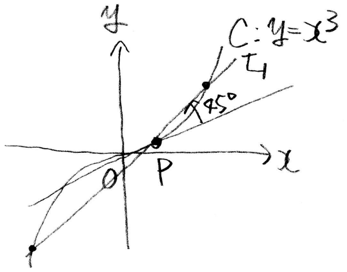
京大理系　2001前期　①



Pの座標を(X, X^3)とする.

Pにおける接線の方向ベクトルは$(1, 3X^2)$

Lの方向ベクトルは $\begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3X^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3X^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-3X^2+1}{\sqrt{2}} \\ \frac{3X^2+1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ より $\begin{pmatrix} -3X^2+1 \\ 3X^2+1 \end{pmatrix}$

$-3X^2+1=0$、$X=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき. Lはy軸に平行であるから. CとLは相異なる3点で交わらない

$X \neq \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき. Lの方程式は　$y-X^3 = \frac{3X^2+1}{-3X^2+1}(x-X)$

$$x^3 = X^3 + \frac{3X^2+1}{-3X^2+1}(x-X)$$

$$(-3X^2+1)x^3 = -3X^5+X^3+(3X^2+1)x-3X^3-X$$

$$(3X^2-1)x^3+(3X^2+1)x-3X^5-2X^3-X=0$$

$$(x-X)\{(3X^2-1)x^2+(3X^3-X)x+3X^4+2X^2+1\}=0$$

$$\begin{array}{r|l} & (3X^2-1)x^2+(3X^3-X)x+3X^4+2X^2+1 \\ \hline x-X & (3X^2-1)x^3 \quad +(3X^2+1)x-3X^5-2X^3-X \\ & (3X^2-1)x^3+(-3X^3+X)x^2 \\ \hline & (3X^3-X)x^2+(3X^2+1)x \\ & (3X^3-X)x^2+(-3X^4+X^2)x \\ \hline & (3X^4+2X^2+1)x-3X^5-2X^3-X \\ & (3X^4+2X^2+1)x-3X^5-2X^3-X \\ \hline & 0 \end{array}$$

$(3X^2-1)x^2+(3X^3-X)x+3X^4+2X^2+1=0$ —① が

$x=X$ 以外の異なる2つの実数解を持てばよい.

①が $x=X$ を解に持つならば. $3X^4-\cancel{X^2}+3X^4-X^2+3X^4+\cancel{2X^2}+1=0$　$9X^4+1=0$.

①が $x=X$ を解に持つことはない.

$$(3X^3-X)^2-4(3X^2-1)(3X^4+2X^2+1)>0$$

$$9X^6-6X^4+X^2-36X^6-24X^4-12X^2+12X^4+8X^2+4>0$$

$$-27X^6-18X^4-3X^2+4>0$$

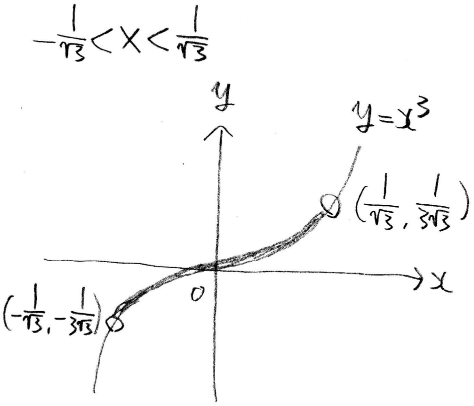
$$27X^6+18X^4+3X^2-4<0$$

$$\left(X^2-\frac{1}{3}\right)\left\{27\left(X^4+X^2+\frac{1}{4}\right)-\frac{27}{4}+\frac{48}{4}\right\}<0$$

$$\left(X^2-\frac{1}{3}\right)\left\{27\left(X^2+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{21}{4}\right\}<0$$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}<X<\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\begin{array}{r|l} & 27X^4+27X^2+12 \\ \hline X^2-\frac{1}{3} & 27X^6+18X^4+3X^2-4 \\ & 27X^6-9X^4 \\ \hline & 27X^4+3X^2 \\ & 27X^4-9X^2 \\ \hline & 12X^2-4 \\ & 12X^2-4 \\ \hline & 0 \end{array}$$



以上より.

Pの範囲は左図の太線部