京大理系　2002前期　③

α, β を整数，γ, δ を $\gamma^2 4\delta < 0$. を満たす実数とする.

題意より. $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 = (x-\alpha)(x-\beta)(x^2 + \gamma x + \delta)$

$\qquad = \{x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta\}(x^2 + \gamma x + \delta)$

$\qquad = x^4 + \gamma x^3 + \delta x^2 - (\alpha+\beta)x^3 - (\alpha+\beta)\gamma x^2 - (\alpha+\beta)\delta x + \alpha\beta x^2 + \alpha\beta\gamma x + \alpha\beta\delta$

$\qquad = x^4 + (-\alpha - \beta + \gamma)x^3 + (\alpha\beta - \alpha\gamma - \beta\gamma + \delta)x^2 + (\alpha\beta\gamma - \alpha\delta - \beta\delta)x + \alpha\beta\delta$

$\begin{cases} a = -\alpha - \beta + \gamma \\ b = \alpha\beta - \alpha\gamma - \beta\gamma + \delta \\ c = \alpha\beta\gamma - \alpha\delta - \beta\delta \\ 1 = \alpha\beta\delta \end{cases}$ が成立.

$\gamma = a + \alpha + \beta$ より. γ は整数である.

$\delta = b - \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma$ より. δ は整数である.

$\alpha\beta\delta = 1$ より. $\delta = -1, 1$ であるが. $\delta > \frac{1}{4}\gamma^2 \geq 0$ より. $\delta = 1$. $(\alpha, \beta, \delta) = (1, 1, 1), (-1, -1, 1)$ である.

$\gamma^2 < 4\delta = 4$ より. $\gamma = -1, 0, 1$ である

よって $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \underset{①}{\underline{(1, 1, -1, 1)}}, \underset{②}{\underline{(1, 1, 0, 1)}}, \underset{③}{\underline{(1, 1, 1, 1)}}, \underset{④}{\underline{(-1, -1, -1, 1)}}, \underset{⑤}{\underline{(-1, -1, 0, 1)}}, \underset{⑥}{\underline{(-1, -1, 1, 1)}}$

①のとき $\begin{cases} a = -1-1-1 = -3 \\ b = 1+1+1+1 = 4 \\ c = -1-1-1 = -3 \end{cases}$　②のとき $\begin{cases} a = -1-1 = -2 \\ b = 1+1 = 2 \\ c = -1-1 = -2 \end{cases}$　③のとき $\begin{cases} a = -1-1+1 = -1 \\ b = 1-1-1+1 = 0 \\ c = 1-1-1 = -1 \end{cases}$

④のとき $\begin{cases} a = 1+1-1 = 1 \\ b = 1-1-1+1 = 0 \\ c = -1+1+1 = 1 \end{cases}$　⑤のとき $\begin{cases} a = 1+1 = 2 \\ b = 1+1 = 2 \\ c = 1+1 = 2 \end{cases}$　⑥のとき $\begin{cases} a = 1+1+1 = 3 \\ b = 1+1+1+1 = 4 \\ c = 1+1+1 = 3 \end{cases}$

よって $(a, b, c) = (-3, 4, -3), (-2, 2, -2), (-1, 0, -1), (1, 0, 1), (2, 2, 2), (3, 4, 3)$