京大理系　2002前期　⑤

$f(x)=x^3+3ax^2+3bx$ とする.

$f'(x)=3x^2+6ax+3b$ ，$f'(x)=0$ のとき $x^2+2ax+b=0$

(i) $a^2-b>0$ ，$a^2>b$ のとき.

$f'(x)=0$ を満たす x は2つ存在し

これらを α、β $(\alpha<\beta)$ とすると

$f(x)$ の増減表は下表のようになる.

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

よって、$f(\beta)<C<f(\alpha)$ のとき

$y=f(x)$ と $y=C$ のグラフが

相異なる3つの交点を持つ.

(ii) $a^2-b\leqq 0$、$a^2\leqq b$ のとき

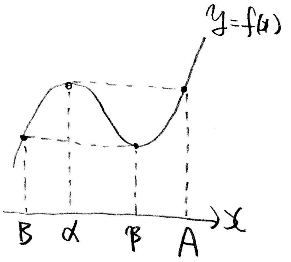
$f'(x)\geqq 0$.

$f(x)$ は単調増加

よって、C がどんな値であっても

$y=f(x)$ と $y=C$ のグラフが

相異なる3つの交点を持つことはない.



$x^3+3ax^2+3bx=\alpha^3+3a\alpha^2+3b\alpha$ は

$x=\alpha$ という重解を持つから

右の割り算が成り立ち

左図において、$A=-3a-2\alpha$

同様に、左図において、$B=-3a-2\beta$

$$\begin{array}{r}
x+3a+2\alpha \\
x^2-2\alpha x+\alpha^2 \,\big)\, x^3+3ax^2+3bx-\alpha^3-3a\alpha^2+3b\alpha \\
x^3-2\alpha x^2+\alpha^2 x \\
\hline
(3a+2\alpha)x^2+(3b-\alpha^2)x-\alpha^3-3a\alpha^2+3b\alpha \\
(3a+2\alpha)x^2+(-6a\alpha-4\alpha^2)x+3a\alpha^2+2\alpha^3 \\
\hline
0
\end{array}$$

$x^2+2ax+b=0$、$x=-a\pm\sqrt{a^2-b}$ より、$\alpha=-a-\sqrt{a^2-b}$ ，$\beta=-a+\sqrt{a^2-b}$

$A=-3a+2a+2\sqrt{a^2-b}=-a+2\sqrt{a^2-b}$ ，$B=-3a+2a-2\sqrt{a^2-b}=-a-2\sqrt{a^2-b}$.

$y=f(x)$ と $y=C$ のグラフの相異なる3つの交点の x 座標を x_1, x_2, x_3 とすると

$B<x_1, x_2, x_3<A$

以上より、題意は示された.