京大理系　2004前期　④

$X=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$，$Y=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ とする

$$AX-XB=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x & 2y \\ x+z & y+w \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} x\alpha & y\beta \\ z\alpha & w\beta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (2-\alpha)x & (2-\beta)y \\ x+(1-\alpha)z & y+(1-\beta)w \end{pmatrix}$$

(1) $\alpha=2$のとき

$AX-XB=\begin{pmatrix} 0 & (2-\beta)y \\ x-z & y+(1-\beta)w \end{pmatrix}$ となるから，$p\neq 0$ のとき，$AX-XB=Y$ となることはない．

(2) $\beta=2$のとき

$AX-XB=\begin{pmatrix} (2-\alpha)x & 0 \\ x+(1-\alpha)z & y-w \end{pmatrix}$ となるから　$q\neq 0$のとき　$AX-XB=Y$ となることはない

(3) $\alpha=1$ のとき

$AX-XB=\begin{pmatrix} x & (2-\beta)y \\ x & y+(1-\beta)w \end{pmatrix}$ となるから．$p\neq r$ のとき　$AX-XB=Y$ となることはない．

(4) $\beta=1$ のとき

$AX-XB=\begin{pmatrix} (2-\alpha)x & y \\ x+(1-\alpha)z & y \end{pmatrix}$ となるから．$q\neq s$ のとき　$AX-XB=Y$ となることはない．

(5) $\alpha\neq 2$ かつ $\beta\neq 2$ かつ $\alpha\neq 1$ かつ $\beta\neq 1$ のとき

$$\begin{pmatrix} (2-\alpha)x & (2-\beta)y \\ x+(1-\alpha)z & y+(1-\beta)w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$$

$x=\dfrac{p}{2-\alpha}$，$y=\dfrac{q}{2-\beta}$

$\dfrac{p}{2-\alpha}+(1-\alpha)z=r$，$z=-\dfrac{p}{(1-\alpha)(2-\alpha)}+\dfrac{r}{1-\alpha}$，　$\dfrac{q}{2-\beta}+(1-\beta)w=s$，$w=-\dfrac{q}{(1-\beta)(2-\beta)}+\dfrac{s}{1-\beta}$ より．

$X=\begin{pmatrix} \dfrac{p}{2-\alpha} & \dfrac{q}{2-\beta} \\ -\dfrac{p}{(1-\alpha)(2-\alpha)}+\dfrac{r}{1-\alpha} & -\dfrac{q}{(1-\beta)(2-\beta)}+\dfrac{s}{1-\beta} \end{pmatrix}$ とすれば　$AX-XB=Y$ となる

以上より．求める条件は．$\alpha\neq 2$ かつ $\beta\neq 2$ かつ $\alpha\neq 1$ かつ $\beta\neq 1$