京大理系　2004前期　⑥

白玉を○，赤球を× と書く

$$\begin{array}{ccccc} \boxed{\bigcirc} & \boxed{\bigcirc} & \cdots & \boxed{\bigcirc} & \boxed{\times} \\ 1 & 2 & & N & N+1 \end{array}$$

k回目の操作終了後，×が$N+1$の箱に入っている確率をa_kとする．

(i) $k=0,1,2\cdots N-1$のとき，$k+1$回目の操作に関して．

(i-i) ×が$N+1$の箱に入っていたとき，

操作終了後，×が$N+1$の箱に $\begin{cases} \text{入っている確率は} & 1-\dfrac{1}{N} \\ \text{入っていない確率は} & \dfrac{1}{N} \end{cases}$

(i-ii) ×が$N+1$の箱に入っていなかったとき

操作終了後，×は$N+1$の箱に入っていない．

よって，$a_{k+1}=\left(1-\dfrac{1}{N}\right)a_k$，　$a_0=1$より，　$a_k=\left(1-\dfrac{1}{N}\right)^k$，　$a_N=\left(1-\dfrac{1}{N}\right)^N$

(ii) $N+1$回目の操作に関して．

(ii-i) ×が$N+1$の箱に入っていたとき，

操作終了後，×は$N+1$の箱に入っていない．

(ii-ii) ×が$N+1$の箱に入っていなかったとき，

操作終了後 ×が$N+1$の箱に $\begin{cases} \text{入っている確率は} & \dfrac{1}{N} \\ \text{入っていない確率は} & 1-\dfrac{1}{N} \end{cases}$

よって，求める確率は　$\left\{1-\left(1-\dfrac{1}{N}\right)^N\right\}\dfrac{1}{N}$