京大理系 2004後期 ⑤

$n=1$ のとき 明らかに 0 通り —①

$n \geqq 2$ とする

$d-a=k$ $(k=1,2\cdots n-1)$ のときを考える

a は $1,2\cdots n-k$ の $n-k$ 通りを取り得る

この a に対して d は 1 通りに定まる

b は $a, a+1, a+2 \cdots a+k-1$ の k 通りを取り得る

c は $a+1, a+2 \cdots a+k$ の k 通りを取り得る

よって $(a.b.c.d)$ は $(n-k)\cdot k \cdot k = -k^3+nk^2$ 通りを取り得る

求める場合の数は $\sum_{k=1}^{n-1}(-k^3+nk^2) = -\left\{\frac{1}{2}(n-1)n\right\}^2 + n\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)$

$= -\frac{1}{4}n^2(n^2-2n+1)+\frac{1}{6}n^2(2n^2-3n+1) = -\frac{1}{4}n^4+\cancel{\frac{1}{2}n^3}-\frac{1}{4}n^2+\frac{1}{3}n^4-\cancel{\frac{1}{2}n^3}+\frac{1}{6}n^2$

$= \frac{-3+4}{12}n^4+\frac{-3+2}{12}n^2 = \frac{1}{12}n^4-\frac{1}{12}n^2$