京大理系 2005前期 ③

$\alpha(-\beta-\gamma)+\beta(-\alpha-\gamma)+\gamma(-\alpha-\beta)=0$

$-\alpha\beta-\alpha\gamma-\alpha\beta-\beta\gamma-\alpha\gamma-\beta\gamma=0$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0$

よって α, β, γ は z についての3次方程式 $z^3-\alpha\beta\gamma=0$ の解

ゆえに $\alpha^3=\beta^3=\gamma^3$

$\alpha=0$ とすると $\gamma=-\beta$, $\beta^2+\beta^2=0$. $\beta=x+yi$ とおくと $(x+yi)^2=0$. $x^2-y^2+2xyi=0$ $\begin{cases} x^2=y^2 \\ xy=0 \end{cases}$, $x=y=0$. $\beta=0$.
これは $\alpha \neq \beta$ に矛盾する. よって $\alpha \neq 0$.

$\alpha=k$ (k は $k>0$ を満たす実数) として考えてよい.

このとき β, γ は z についての3次方程式 $z^3=k^3$ の $z=k$ 以外の解であるから

$z^3-k^3=0$ $(z-k)(z^2+kz+k^2)=0$. $z=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-4k^2}}{2}=k\left(-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=k\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right), k\left(\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi\right)$ より

β, γ は α を原点を中心に $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{4}{3}\pi$ 回転させたものである

よって 重心が原点である正三角形