京大理系　2005前期　④

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$，　※ $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3+\cancel{a^2b}+\cancel{ab^2}-\cancel{a^2b}-\cancel{ab^2}-b^3=a^3-b^3$

$217=7\cdot 31$，

$$\begin{array}{r} 31 \\ 7\overline{)217} \\ 21 \\ \hline 7 \\ 7 \\ \hline 0 \end{array}$$

$a^3-b^3>0$．$a^3>b^3$ より．$y=x^3$ のグラフは単調増加であることより．$a>b$．$a-b>0$．

以上より．以下の4通りが考えられる．

$\begin{cases} a-b=1 \\ a^2+ab+b^2=217 \end{cases}$ —①，$\begin{cases} a-b=217 \\ a^2+ab+b^2=1 \end{cases}$ —②，$\begin{cases} a-b=7 \\ a^2+ab+b^2=31 \end{cases}$ —③，$\begin{cases} a-b=31 \\ a^2+ab+b^2=7 \end{cases}$ —④

$a^2+ab+b^2=(a-b)^2+3ab$

①のとき．$1+3a(a-1)=217$，$3a^2-3a-216=0$．$a^2-a-72=0$．

$a=\dfrac{1\pm\sqrt{1+288}}{2}=\dfrac{1\pm 17}{2}=9,\ -8$．$b=8,\ -9$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times 17 \\ \hline 119 \\ 17 \\ \hline 289 \end{array}$$

②のとき．$217^2+3a(a-217)=1$，$3a^2-3\cdot 217a+217^2-1=0$

$9\cdot 217^2-12(217^2-1)=-3\cdot 217^2+12<0$ より これを満たす (a,b) は存在しない．

③のとき．$49+3a(a-7)=31$，$3a^2-21a+18=0$．$a^2-7a+6=0$

$a=\dfrac{7\pm\sqrt{49-24}}{2}=\dfrac{7\pm 5}{2}=6,\ 1$　　$b=-1,\ -6$

④のとき．$961+3a(a-31)=7$，$3a^2-93a+954=0$

$8649-11448<0$ より．これを満たす (a,b) は存在しない．

$$\begin{array}{r} 31 \\ \times 31 \\ \hline 31 \\ 93 \\ \hline 961 \end{array}\qquad \begin{array}{r} 93 \\ \times 93 \\ \hline 279 \\ 837 \\ \hline 8649 \end{array}\qquad \begin{array}{r} 954 \\ \times 12 \\ \hline 1908 \\ 954 \\ \hline 11448 \end{array}$$

以上より．$(a,b)=(9,8),\ (-8,-9),\ (6,-1),\ (1,-6)$