京大理系　2005前期 ⑤

(1) $\cos 2k\pi=1$, $\cos(2k+1)\pi=-1$, $2k\pi<x<(2k+1)\pi$ のとき $\cos x$ は単調減少 —①

$x\neq 0$ のとき $\frac{1-x^2}{1+x^2}=\frac{1+x^2-2x^2}{1+x^2}=1-\frac{2x^2}{1+x^2}=1-\frac{2}{\frac{1}{x^2}+1}$ より, $2k\pi\leqq x\leqq(2k+1)\pi$ のとき, $-1<\frac{1-x^2}{1+x^2}<1$ —②

①②より, G_1とG_2は共有点を持つ.

共有点のx座標をXとする.

$(X, \cos X)$におけるG_1の接線の方程式は, $y-\cos X=-\sin X(x-X)$ —③

ここで $\cos X=\frac{1-X^2}{1+X^2}$, $\sin^2 X+\frac{1-2X^2+X^4}{(1+X^2)^2}=\frac{1+2X^2+X^4}{(1+X^2)^2}$, $\sin^2 X=\frac{4X^2}{(1+X^2)^2}$, $\sin X\geqq 0$ より $\sin X=\frac{2X}{1+X^2}$ であるから.

③は, $y-\frac{1-X^2}{1+X^2}=-\frac{2X}{1+X^2}(x-X)$ —③' と書ける.

③'で, $x=0$ とすると, $y=\frac{2X^2}{1+X^2}+\frac{1-X^2}{1+X^2}=1$ となるから題意は示された.

(2) $(t, \cos t)$ $(2k\pi\leqq t\leqq(2k+1)\pi)$ における接線の方程式は, $y-\cos t=-\sin t(x-t)$

これと, y軸の交点のy座標を$Y(t)$とすると, $Y(t)=t\sin t+\cos t$

$Y'(t)=\cancel{\sin t}+t\cos t-\cancel{\sin t}=t\cos t$, $Y'(t)=0$ のとき $\cos t=0$, $t=(2k+\frac{1}{2})\pi$

t	$2k\pi$	$\cdots$	$(2k+\frac{1}{2})\pi$	$\cdots$	$(2k+1)\pi$
$Y'(t)$		$+$	0	$-$	
$Y(t)$	1	$\nearrow$	最大	$\searrow$	-1

$Y(t)$の増減表は左表のようになる

(1)より, $(2k\pi, 1)$はG_1とG_2の共有点ではなく,

$2k\pi<t\leqq(2k+1)\pi$ のとき,

G_1の接線が$(0, 1)$を通るような点はただ1つであるから,

G_1とG_2の共有点はただ1つである.