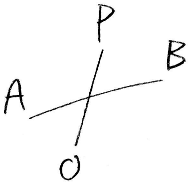
京大理系　2006前期　②



OP上の点は $(\alpha t+5\alpha,\ 2\alpha t+9\alpha,\ 3\alpha t+5\alpha)$　$(0\leqq\alpha\leqq1)$ とおける。

AB上の点は $(0,1,2)+\beta(2,2,-2)=(2\beta,2\beta+1,-2\beta+2)$　$(0\leqq\beta\leqq1)$ とおける。

$\alpha t=\gamma$ —① とする。

連立方程式
$$\begin{cases} 5\alpha+\gamma=2\beta & \text{—②} \\ 9\alpha+2\gamma=2\beta+1 & \text{—③} \\ 5\alpha+3\gamma=-2\beta+2 & \text{—④} \end{cases}$$
が $0\leqq\alpha\leqq1$, $0\leqq\beta\leqq1$ である解を持つならば OPとABが交点を持つ。

②③より、$9\alpha+2\gamma=5\alpha+\gamma+1$, $4\alpha+\gamma=1$

②④より、$5\alpha+3\gamma=-5\alpha-\gamma+2$, $5\alpha+2\gamma=1$

$$\begin{array}{r} 8\alpha+2\gamma=2 \\ -)\ 5\alpha+2\gamma=1 \\ \hline 3\alpha\quad\ =1 \end{array}$$

$\alpha=\frac{1}{3}$, $\gamma=-\frac{1}{3}$

②より、$\frac{5}{3}-\frac{1}{3}=2\beta$, $\beta=\frac{2}{3}$, ①より、$t=-1$

よって $t=-1$ のとき、OPとABは交点 $\left(2\cdot\frac{2}{3},\ 2\cdot\frac{2}{3}+1,\ -2\cdot\frac{2}{3}+2\right)=\left(\frac{4}{3},\ \frac{7}{3},\ \frac{2}{3}\right)$ を持つ。