

$A(x) = ax + \alpha, B(x) = bx + \beta, C(x) = cx + \gamma$ とおく

$a^2x^2 + 2a\alpha x + \alpha^2 + b^2x^2 + 2b\beta x + \beta^2 = c^2x^2 + 2c\gamma x + \gamma^2, (a^2+b^2-c^2)x^2 + 2(a\alpha+b\beta-c\gamma)x + \alpha^2+\beta^2-\gamma^2=0$

$\begin{cases} a^2+b^2=c^2 & \text{---(1)} \\ a\alpha+b\beta=c\gamma & \text{---(2)} \\ \alpha^2+\beta^2=\gamma^2 & \text{---(3)} \end{cases}$

②+① $a^2x^2 + 2a\alpha b\beta + b^2\beta^2 = c^2\gamma^2$ ---④

①③+① $(a^2+b^2)(\alpha^2+\beta^2) = c^2\gamma^2$ ---⑤

④⑤+① $a^2x^2 + 2a\alpha b\beta + b^2\beta^2 = a^2x^2 + a^2\beta^2 + \alpha^2b^2 + b^2\beta^2$

$a^2\beta^2 - 2a\alpha b\beta + \alpha^2b^2 = 0, (a\beta - \alpha b)^2 = 0, a\beta = \alpha b$ ---⑥

$a=0$ のとき, ①+① $b = \pm c, ②+① \pm c\beta = c\gamma, c \neq 0$ とし $\beta = \pm \gamma, ③+① \alpha = 0$

このとき $A(x) = 0, B(x) = \pm C(x)$ となるから 題意は成り立つ

$a=0$ から $c=0$ のとき ①+① $b=0, ②+① \alpha = \gamma, B(x) = \beta, C(x) = \gamma$ となるから 題意は成り立つ

同様に $c=0$ のときも 題意は成り立つ

$\alpha=0$ のとき ③+① $\beta = \pm \gamma, ②+① \pm b\gamma = c\gamma, \gamma \neq 0$ とし $b = \pm c, ①+① a = 0$

このとき $A(x) = 0, B(x) = \pm C(x)$ となるから 題意は成り立つ

$\alpha=0$ から $\gamma=0$ のとき ③+① $\beta=0, ②+① a = \alpha, B(x) = bx, C(x) = cx$ となるから 題意は成り立つ

同様に $c=0$ のときも 題意は成り立つ

$a \neq 0, \alpha \neq 0, b \neq 0, \beta \neq 0$ のとき ⑥+① $\frac{b}{a} = \frac{\beta}{\alpha}$ とし $b = ka, \beta = k\alpha$ とおいた

①+① $a^2 + k^2a^2 = c^2, a^2 = \frac{c^2}{k^2+1}, a = \pm \frac{c}{\sqrt{k^2+1}}, ③+① \alpha^2 + k^2\alpha^2 = \gamma^2, \alpha^2 = \frac{\gamma^2}{k^2+1}, \alpha = \pm \frac{\gamma}{\sqrt{k^2+1}}$

よって $A(x) = \pm \frac{c}{\sqrt{k^2+1}}x \pm \frac{\gamma}{\sqrt{k^2+1}} = \pm \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}C(x), B(x) = \pm \frac{kc}{\sqrt{k^2+1}}x \pm \frac{k\gamma}{\sqrt{k^2+1}} = \pm \frac{k}{\sqrt{k^2+1}}C(x)$

以上+① 題意は示された