京大理系 2007前期③

$a(-a-b-c)-bc+p=0$, $a^2+(b+c)a+bc-p=0$ —①

$(-b-c-d)d-bc+p=0$, $d^2+(b+c)d+bc-p=0$ —②

①②より a, d は $x^2+(b+c)x+bc-p=0$ の解

よって $a^2+(b+c)a+bc-p=0$. $(a+b)(a+c)=p$ —③

$d^2+(b+c)d+bc-p=0$. $(b+d)(c+d)=p$ —④

③, pは素数, $a+b \geqq a+c$ より $\begin{cases} a+b=p \\ a+c=1 \end{cases}$ または $\begin{cases} a+b=-1 \\ a+c=-p \end{cases}$

④, pは素数 $b+d \geqq c+d$ より $\begin{cases} b+d=p \\ c+d=1 \end{cases}$ または $\begin{cases} b+d=-1 \\ c+d=-p \end{cases}$

$a+b \geqq b+d$ より $\begin{cases} a+b=p \\ a+c=1 \\ b+d=-1 \\ c+d=-p \end{cases}$ $\begin{cases} b=-a+p \\ c=-a+1 \\ d=a-p-1 \end{cases}$

$a \geqq -a+p \geqq -a+1 \geqq a-p-1$ より

$$\begin{cases} a \geqq -a+p, & a \geqq \frac{p}{2} \\ a \geqq -a+1, & a \geqq \frac{1}{2} \\ a \geqq a-p-1, & p \geqq -1 \\ -a+p \geqq -a+1, & p \geqq 1 \\ -a+p \geqq a-p-1. & 2a \leqq 2p+1 \quad a \leqq p+\frac{1}{2} \\ -a+1 \geqq a-p-1. & 2a \leqq p+2. \quad a \leqq \frac{p}{2}+1 \end{cases}$$

よって $\frac{p}{2} \leqq a \leqq \frac{p}{2}+1$

pは奇数より $\frac{p}{2}+\frac{1}{2}$ は整数

よって $a=\frac{p+1}{2}$, $b=\frac{-p-1+2p}{2}=\frac{p-1}{2}$, $c=\frac{-p-1+2}{2}=\frac{-p+1}{2}$, $d=\frac{p+1-2p-2}{2}=\frac{-p-1}{2}$