京大理系 2007前期 ⑤

$\overrightarrow{x_n}=A\overrightarrow{x_{n-1}}=A^2\overrightarrow{x_{n-2}}=\cdots=A^n\overrightarrow{x_0}$

$\overrightarrow{x_m}=\overrightarrow{x_0}$ のとき. $\overrightarrow{x_m}=A^m\overrightarrow{x_0}$ より $A^m\overrightarrow{x_0}=\overrightarrow{x_0}$

ケーリー・ハミルトンの定理より $A^m=\alpha A+\beta E$ (α.βはある実数)とおけるから.

$(\alpha A+\beta E)\overrightarrow{x_0}=\overrightarrow{x_0}$. $\alpha A\overrightarrow{x_0}=(-\beta+1)\overrightarrow{x_0}$

$\alpha\neq 0$のとき $A\overrightarrow{x_0}=\dfrac{-\beta+1}{\alpha}\overrightarrow{x_0}$, $A^m\overrightarrow{x_0}=\overrightarrow{x_0}$であるから. $A^m\overrightarrow{x_0}=\left(\dfrac{-\beta+1}{\alpha}\right)^m\overrightarrow{x_0}$ より $\left(\dfrac{-\beta+1}{\alpha}\right)^m\overrightarrow{x_0}=\overrightarrow{x_0}$

$\dfrac{-\beta+1}{\alpha}=1$のとき. $\beta=-\alpha+1$. $A^m=\alpha A+(-\alpha+1)E$

$A^m\overrightarrow{x_0}=\overrightarrow{x_0}$ であるから. $\{\alpha A+(-\alpha+1)E\}\overrightarrow{x_0}=\overrightarrow{x_0}$. $\alpha A\overrightarrow{x_0}=\alpha\overrightarrow{x_0}$. $A\overrightarrow{x_0}=\overrightarrow{x_0}$ これは題意に矛盾する.

$\dfrac{-\beta+1}{\alpha}=-1$ のとき $\beta=\alpha+1$. $A^m=\alpha A+(\alpha+1)E$

$A^m\overrightarrow{x_0}=\overrightarrow{x_0}$ であるから $\{\alpha A+(\alpha+1)E\}\overrightarrow{x_0}=\overrightarrow{x_0}$. $\alpha A\overrightarrow{x_0}=-\alpha\overrightarrow{x_0}$. $A\overrightarrow{x_0}=-\overrightarrow{x_0}$. $A^2\overrightarrow{x_0}=\overrightarrow{x_0}$. これは題意に矛盾する.

よって. $\alpha=0$. $A^m=\beta E$. $A^m\overrightarrow{x_0}=\overrightarrow{x_0}$ より $\beta\overrightarrow{x_0}=\overrightarrow{x_0}$. $\beta=1$. ゆえに$A^m=E$