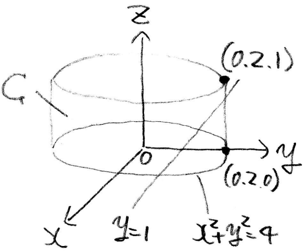
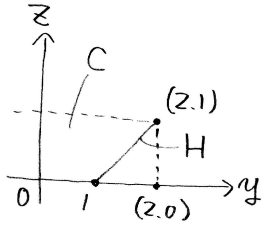
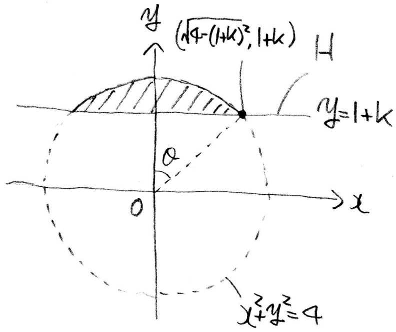
京大理系　2008前期 ⑤





点(0.2.0)を含む方をDとする



Dを $z=k$ $(0 \leqq k \leqq 1)$ で切った切り口は左図の斜線部

左図のように θ をとると斜線部の面積は

$$4\pi \frac{2\theta}{2\pi} - \sqrt{4-(1+k)^2}\,(1+k)$$

※ $x^2+(1+k)^2=4$. $x=\pm\sqrt{4-(1+k)^2}$

求める体積を V とすると

$$V=\int_0^1\left\{4\theta-\sqrt{4-(1+k)^2}\,(1+k)\right\}dk=\int_{\frac{\pi}{3}}^{0}\left(4\theta-\sqrt{4-4\cos^2\theta}\cdot 2\cos\theta\right)(-2\sin\theta)\,d\theta$$

$\cos\theta=\frac{1+k}{2}$ より $1+k=2\cos\theta$ とおく

$$\begin{array}{c|c} k & 0\to 1 \\ \hline \theta & \frac{\pi}{3}\to 0 \end{array} \qquad \frac{dk}{d\theta}=-2\sin\theta$$

$$=8\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\theta-\sin\theta\cos\theta)\sin\theta\,d\theta=8\int_0^{\frac{\pi}{3}}\theta(-\cos\theta)'\,d\theta-8\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$=8\left[-\theta\cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}}+8\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos\theta\,d\theta-8\left[\frac{\sin^3\theta}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=-\frac{8\pi}{3}\frac{1}{2}+8\left[\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}}-\frac{8}{3}\frac{3\sqrt{3}}{8}$$

$(\sin^3\theta)'=3\sin^2\theta\cos\theta$ より $\left(\frac{\sin^3\theta}{3}\right)'=\sin^2\theta\cos\theta$

$$=-\frac{4}{3}\pi+8\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}=3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi$$