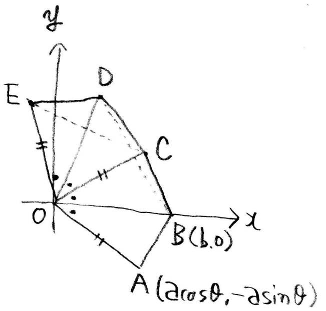
京大文系　2009前期　④



xy平面で考える

左図のように O, A, B, C, D, E をとる，$\angle AOB=\theta$ とする

Eの座標は $(a\cos3\theta,\ a\sin3\theta)$

$\triangle OAB$の面積は $b\cdot a\sin\theta\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}ab\sin\theta$

$\triangle OBE$の面積は $b|a\sin3\theta|\frac{1}{2}=\frac{1}{2}ab|\sin3\theta|$

$\sin3\theta=\sin(2\theta+\theta)=\sin2\theta\cos\theta+\cos2\theta\cdot\sin\theta=2\sin\theta(1-\sin^2\theta)+(1-2\sin^2\theta)\sin\theta=-4\sin^3\theta+3\sin\theta$

(i) $0<\theta<\frac{\pi}{3}$のとき

$\dfrac{\frac{1}{2}ab\sin3\theta}{\frac{1}{2}ab\sin\theta}=\dfrac{3}{2}$　$-4\sin^2\theta+3=\dfrac{3}{2}$，$-8\sin^2\theta+6=3$，$\sin^2\theta=\dfrac{3}{8}$　$\sin\theta=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

$0<\sin\theta<\frac{\sqrt{3}}{2}$ より，$\sin\theta=\frac{\sqrt{6}}{4}$

(ii) $\frac{\pi}{3}<\theta<\frac{\pi}{2}$のとき

$\dfrac{-\frac{1}{2}ab\sin3\theta}{\frac{1}{2}ab\sin\theta}=\dfrac{3}{2}$，$4\sin^2\theta-3=\dfrac{3}{2}$，$8\sin^2\theta-6=3$　$\sin^2\theta=\dfrac{9}{8}$　$\sin\theta=\pm\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

$\frac{\sqrt{3}}{2}<\sin\theta<1$ より 不適