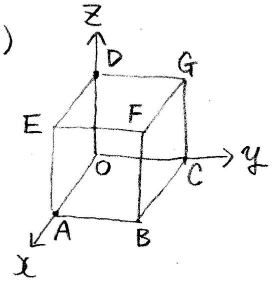
京大文系　2010前期　⑤

(1)



OFに平行で長さが1のベクトルは $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

OF上の点 $\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{a}{\sqrt{3}}\right)$ $(0\leqq a\leqq 1)$ を通りOFに垂直な平面を π_a とすると

これの方程式は $\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{a}{\sqrt{3}}\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\left(y-\frac{a}{\sqrt{3}}\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\left(z-\frac{a}{\sqrt{3}}\right)=0$.　$x+y+z-\sqrt{3}a=0$

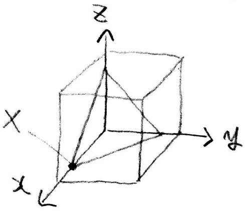
これがAを通るとき　$1-\sqrt{3}a=0$　$a=\frac{1}{\sqrt{3}}$

求める長さは $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ と $(1,0,0)$ のきょりであるから

$$\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

(2) 対称性より $0\leqq a\leqq\frac{\sqrt{3}}{2}$ とする

π_a と立方体の交わり上にある点と $\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{a}{\sqrt{3}}\right)$ のきょりの最大値の2乗を $f(a)$ とする

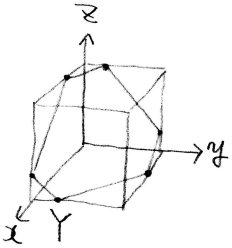


(1)より $0\leqq a\leqq\frac{\sqrt{3}}{3}$ のとき左図のようになる

このとき $f(a)$ を与える点の1つは左図のX

$x-\sqrt{3}a=0$.　$x=\sqrt{3}a$ より Xの座標は $(\sqrt{3}a,0,0)$

$$f(a)=\left(\frac{a}{\sqrt{3}}-\sqrt{3}a\right)^2+\frac{a^2}{3}+\frac{a^2}{3}=\left(\frac{1}{3}-2+3+\frac{2}{3}\right)a^2=2a^2 \quad \text{——①}$$



$\frac{\sqrt{3}}{3}\leqq a\leqq\frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき左図のようになる

このとき $f(a)$ を与える点の1つは左図のY

$1+y-\sqrt{3}a=0$.　$y=\sqrt{3}a-1$ より Yの座標は $(1,\sqrt{3}a-1,0)$

$$f(a)=\left(\frac{a}{\sqrt{3}}-1\right)^2+\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}a+1\right)^2+\frac{a^2}{3}=\frac{a^2}{3}-\frac{2\sqrt{3}a}{3}+1+\frac{4a^2}{3}-\frac{4\sqrt{3}a}{3}+1+\frac{a^2}{3}=2a^2-2\sqrt{3}a+2 \quad \text{——②}$$

求める体積をVとすると、①②より

$$\frac{V}{2}\frac{1}{\pi}=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}2a^2da+\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}(2a^2-2\sqrt{3}a+2)da$$

$$\frac{V}{4\pi}=\left[\frac{a^3}{3}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}+\left[\frac{a^3}{3}-\sqrt{3}\frac{a^2}{2}+a\right]_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\cancel{\frac{3\sqrt{3}}{81}}+\frac{3\sqrt{3}}{24}-\frac{3\sqrt{3}}{8}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\cancel{\frac{3\sqrt{3}}{81}}+\frac{3\sqrt{3}}{18}-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$=\frac{3-9+12+4-8}{24}\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{12} \qquad V=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$$