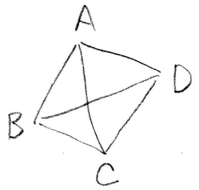
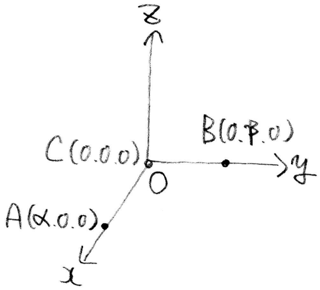
京大理系　2010前期　甲②





xyz空間で考えると左図のようにA,B,Cをとることができる。

Dの座標を(X, Y, Z)とすると

$\overrightarrow{DA}=(\alpha-X, -Y, -Z)$, $\overrightarrow{DB}=(-X, \beta-Y, -Z)$

$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=0$ より $-\alpha X+X^2-\beta Y+Y^2+Z^2=0$, $X^2+Y^2+Z^2=\alpha X+\beta Y$ —①

$\overrightarrow{AB}=(-\alpha, \beta, 0)$　$\overrightarrow{CD}=(X, Y, Z)$ —④

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$ より $-\alpha X+\beta Y=0$, $\alpha X=\beta Y$ —②

Mの座標は $\left(\frac{X}{2}, \frac{Y}{2}, \frac{Z}{2}\right)$, $\overrightarrow{MA}=\left(\alpha-\frac{X}{2}, -\frac{Y}{2}, -\frac{Z}{2}\right)$　$\overrightarrow{MB}=\left(-\frac{X}{2}, \beta-\frac{Y}{2}, -\frac{Z}{2}\right)$

$$\begin{array}{cccc}
\alpha-\frac{X}{2} & -\frac{Y}{2} & -\frac{Z}{2} & \alpha-\frac{X}{2} \\
-\frac{X}{2} & \beta-\frac{Y}{2} & -\frac{Z}{2} & -\frac{X}{2} \\
\hline
\alpha\beta-\frac{\alpha Y}{2}-\frac{\beta X}{2}+\cancel{\frac{XY}{4}}-\cancel{\frac{XY}{4}} & \cancel{\frac{YZ}{4}}+\frac{\beta Z}{2}-\cancel{\frac{YZ}{4}} & \cancel{\frac{XZ}{4}}+\frac{\alpha Z}{2}-\cancel{\frac{XZ}{4}} &
\end{array}$$

$\overrightarrow{MA}\times\overrightarrow{MB}=\left(\frac{\beta Z}{2}, \frac{\alpha Z}{2}, \alpha\beta-\frac{\alpha Y}{2}-\frac{\beta X}{2}\right)$

よって平面の法線ベクトルは $(\beta Z, \alpha Z, 2\alpha\beta-\alpha Y-\beta X)$ —③

③④より $\frac{\beta Z}{X}=\frac{\alpha Z}{Y}$, $\frac{\beta}{X}=\frac{\alpha}{Y}$ —⑤, $\frac{\beta Z}{X}=\frac{2\alpha\beta-\alpha Y-\beta X}{Z}$, $Z^2=2\alpha X-\frac{\alpha XY}{\beta}-X^2$ —⑥ を示せばよい。

②より $\frac{\beta}{X}=\frac{\alpha}{Y}$. よって⑤は示された。

①②より $Z^2=\alpha X+\beta Y-X^2-Y^2=2\alpha X-X^2-\frac{\alpha XY}{\beta}$　よって⑥は示された。