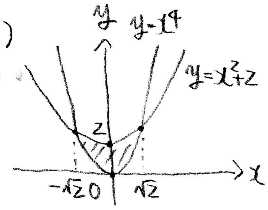
京大文系 2012前期 ①

(1)



2つの曲線の交点のx座標は

$x^4=x^2+2$, $x^4-x^2-2=0$ $x^2=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm3}{2}=-1,2$ $x^2>0$より$x^2=2$, $x=\pm\sqrt{2}$より$\pm\sqrt{2}$

よって求める面積は $2\int_0^{\sqrt{2}}(x^2+2-x^4)dx=2\left[-\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}+2x\right]_0^{\sqrt{2}}=2\left(-\frac{4\sqrt{2}}{5}+\frac{2\sqrt{2}}{3}+2\sqrt{2}\right)$

$=2\frac{-12+10+30}{15}\sqrt{2}=\frac{56}{15}\sqrt{2}$

(2) $\boxed{1}\boxed{2}\cdots\boxed{n}$

$\boxed{1}\boxed{2}\cdots\boxed{n}$

すべての取り出し方は $2n(2n-1)(2n-2)$通り —①

条件を満たす取り出し方は、1回目は $1, 2 \cdots n-2$ のいずれかを取り出せばよい

2回目は $x_1+1, x_1+2 \cdots n-1$ のいずれかを取り出せばよい

3回目は $x_2+1, x_2+2 \cdots n$ のいずれかを取り出せばよい

またある x_1, x_2, x_3 の組に対して $2\times2\times2=8$通りの取り出し方がある

よって $8\sum_{a=1}^{n-2}\left\{\sum_{b=a+1}^{n-1}\left(\sum_{c=b+1}^{n}\right)\right\}=8\sum_{a=1}^{n-2}\left\{\sum_{b=a+1}^{n-1}(n-b)\right\}=8\sum_{a=1}^{n-2}\left\{\sum_{b=1}^{n-1}(-b+n)-\sum_{b=1}^{a}(-b+n)\right\}$

$=8\sum_{a=1}^{n-2}\left\{-\frac{1}{2}(n-1)n+(n-1)n+\frac{1}{2}a(a+1)-an\right\}=8\sum_{a=1}^{n-2}\left\{\frac{1}{2}a^2+\left(-n+\frac{1}{2}\right)a+\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n\right\}$

$=4\frac{1}{6}(n-2)(n-1)\{2(n-2)+1\}+(-8n+4)\frac{1}{2}(n-2)(n-1)+(4n^2-4n)(n-2)$

$=\frac{2}{3}(n^2-3n+2)(2n-3)+(-4n+2)(n^2-3n+2)+4n^3-12n^2+8n$

$=\frac{2}{3}(2n^3-3n^2-6n^2+9n+4n-6)\cancel{-4n^3}\cancel{+12n^2}\cancel{-8n}+2n^2-6n+4\cancel{+4n^3}\cancel{-12n^2}\cancel{+8n}$

$=\frac{4}{3}n^3-6n^2+\frac{26}{3}n\cancel{-4}+2n^2-6n\cancel{+4}=\frac{4}{3}n^3-4n^2+\frac{8}{3}n=\frac{4}{3}n(n^2-3n+2)$

$=\frac{4}{3}n(n-1)(n-2)$通り —②

①②より求める確率は $\frac{\frac{1}{3}4n(n-1)(n-2)}{2n(2n-1)2(n-1)}=\frac{n-2}{3(2n-1)}$