京大理系 2012前期 ①

(1) (i) $0<a<1$ のとき $\lim_{n\to\infty} a^n=0$ より 与式 $=(1+0)^0=1$

(ii) $a=1$ のとき 与式 $=\lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{n}}=2^0=1$

(iii) $a>1$ のとき $(1+a^n)^{\frac{1}{n}}>(a^n)^{\frac{1}{n}}=a$ —①

$(a^{n+1})^{\frac{1}{n}}=a^{1+\frac{1}{n}}$ より $1+a^n<a^{n+1}$ のとき $a^n(a-1)>1$ $a^n>\frac{1}{a-1}$

ここで $\lim_{n\to\infty} a^n=\infty$ より $n\geqq m$ のとき $a^n>\frac{1}{a-1}$ となるような m をとることができるから

$n\geqq m$ のとき $a^n>\frac{1}{a-1}$, $a^{n+1}-a^n>1$ $1+a^n<a^{n+1}$ $(1+a^n)^{\frac{1}{n}}<a^{1+\frac{1}{n}}$ —②

$\lim_{n\to\infty} a=a$, $\lim_{n\to\infty} a^{1+\frac{1}{n}}=a^{1+0}=a$ より ①②より はさみうちの原理より 与式 $=a$

(2) $(\log\sqrt{1+x^2})'=\dfrac{\frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{x}{1+x^2}$, $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$ より $\frac{1}{x^2}=\left(-\frac{1}{x}\right)'$

与式 $=\int_1^{\sqrt3}\left(-\frac{1}{x}\right)'\log\sqrt{1+x^2}\,dx=\left[-\frac{1}{x}\log\sqrt{1+x^2}\right]_1^{\sqrt3}+\int_1^{\sqrt3}\frac{1}{\cancel{x}}\frac{\cancel{x}}{1+x^2}dx=-\frac{1}{\sqrt3}\log2+\log\sqrt2+\int_1^{\sqrt3}\frac{1}{1+x^2}dx$

$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt3}\right)\log2+\int_1^{\sqrt3}\frac{1}{1+x^2}dx$

ここで 〜部 $=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cancel{\cos^2\theta}}}\frac{1}{\cancel{\cos^2\theta}}d\theta=[\theta]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{4-3}{12}\pi=\frac{\pi}{12}$ より

$x=\tan\theta$ とおく

x	$1\to\sqrt3$
θ	$\frac{\pi}{4}\to\frac{\pi}{3}$

$\frac{dx}{d\theta}=\frac{\cos\theta\cos\theta+\sin\theta\sin\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}$

与式 $=\frac{\sqrt3-2}{2\sqrt3}\log2+\frac{\pi}{12}=\frac{-2\sqrt3+3}{6}\log2+\frac{\pi}{12}$