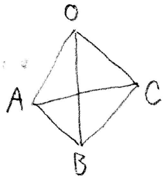
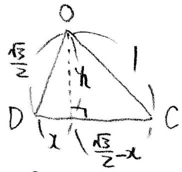
京大理系 2012前期 ② （京大文系 2012前期 ③ も同じ問題）

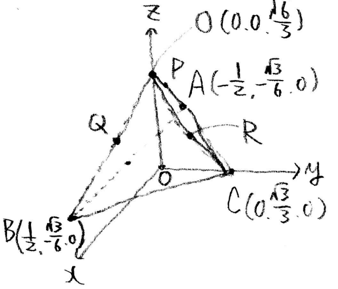




正四面体の1辺の長さを1として考えてよい

ABの中点をDとすると左図のようになるから $\begin{cases} x^2+h^2=\frac34 \\ x^2-\sqrt3 x+\frac34+h^2=1 \end{cases}$

$\frac34-\sqrt3x+\frac34=1$, $\frac12=\sqrt3x$ $x=\frac{\sqrt3}{6}$ $\frac1{12}+h^2=\frac34$, $h^2=\frac23$, $h>0$より $h=\frac{\sqrt6}{3}$



xyz空間で考える。左図のように O.A.B.C をとる。

P.Q.Rの座標は $0<p<1$, $0<q<1$, $0<r<1$ として

$(0,0,\frac{\sqrt6}{3})+p(-\frac12,-\frac{\sqrt3}{6},-\frac{\sqrt6}{3})=(-\frac12p,-\frac{\sqrt3}{6}p,\frac{\sqrt6}{3}(-p+1))$

$(0,0,\frac{\sqrt6}{3})+q(\frac12,-\frac{\sqrt3}{6},-\frac{\sqrt6}{3})=(\frac12q,-\frac{\sqrt3}{6}q,\frac{\sqrt6}{3}(-q+1))$

$(0,0,\frac{\sqrt6}{3})+r(0,\frac{\sqrt3}{3},-\frac{\sqrt6}{3})=(0,\frac{\sqrt3}{3}r,\frac{\sqrt6}{3}(-r+1))$

$PQ^2=\left\{\frac12(q+p)\right\}^2+\left\{-\frac{\sqrt3}{6}(q-p)\right\}^2+\left\{\frac{\sqrt6}{3}(-q+\cancel{1}+p-\cancel{1})\right\}^2=\frac14(p^2+2pq+q^2)+\frac1{12}(p^2-2pq+q^2)+\frac23(p^2-2pq+q^2)$

$=\frac{3+1+8}{12}p^2+\frac{6-2-16}{12}pq+\frac{3+1+8}{12}q^2=p^2-pq+q^2$

$PR^2=\frac14p^2+\left\{\frac{\sqrt3}{6}(2r+p)\right\}^2+\left\{\frac{\sqrt6}{3}(-r+\cancel{1}+p-\cancel{1})\right\}^2=\frac14p^2+\frac1{12}(p^2+4pr+4r^2)+\frac23(p^2-2pr+r^2)$

$=\frac{3+1+8}{12}p^2+\frac{4-16}{12}pr+\frac{4+8}{12}r^2=p^2-pr+r^2$

$QR^2=\frac14q^2+\left\{\frac{\sqrt3}{6}(2r+q)\right\}^2+\left\{\frac{\sqrt6}{3}(-r+\cancel{1}+q-\cancel{1})\right\}^2=\frac14q^2+\frac1{12}(q^2+4qr+4r^2)+\frac23(q^2-2qr+r^2)$

$=\frac{3+1+8}{12}q^2+\frac{4-16}{12}qr+\frac{4+8}{12}r^2=q^2-qr+r^2$

△PQRが正三角形であるとき $PQ=PR=QR$ $PQ^2=PR^2=QR^2$ $\begin{cases} \cancel{p^2}-pq+q^2=\cancel{p^2}-pr+r^2 & ① \\ p^2-pq+\cancel{q^2}=\cancel{q^2}-qr+r^2 & ② \\ p^2-pr+\cancel{r^2}=q^2-qr+\cancel{r^2} & ③ \end{cases}$

①より $(q-r)(q+r)=p(q-r)$ ①'

②より $(p-r)(p+r)=q(p-r)$ ②'

③より $(p-q)(p+q)=r(p-q)$ ③'

$p=q$のとき ①'より $\cancel{p^2}-r^2=\cancel{p^2}-pr$, $(p-r)r=0$, $r\neq0$より $p=r$

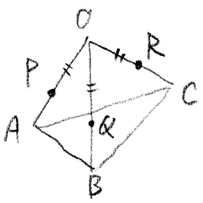
このとき②'③'は成立つ。よって $p=q=r$

$p\neq q$のとき ③'より $r=p+q$

①'より $-p(q+r)=-p^2$ $p=q+r$ $p+q=p-q$ $q=0$

これは $q\neq0$に矛盾

よって $p=q=r$



このとき3辺PQ, QR, RPは

それぞれ3辺AB, BC, CAに平行である。